В. А. Гусев
А. И. Медяник

ГЕОМЕТРИЯ

9

Дидактические материалы

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

В. А. Гусев А. И. Медяник

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

9 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

14-е издание

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2017

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г96

6+

Рецензенты:
учитель математики средней школы № 510 Москвы,
заслуженный учитель РФ *Н. П. Адамская*;
учитель математики школы-гимназии № 1567 Москвы,
заслуженный учитель РФ *Л. И. Звавич*;
учитель математики средней школы № 1741 Москвы
И. Е. Феоктистов

Гусев В. А.
Г96 Геометрия. Дидактические материалы. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. А. Гусев, А. И. Медяник.— 14-е изд.— М. : Просвещение, 2017.— 112 с. : ил.— ISBN 978-5-09-051000-4.

Данное пособие содержит самостоятельные работы, дифференцированные задания, дополнительные задачи и контрольные работы по геометрии для 9 класса средней школы. Оно составлено в соответствии с учебником А. В. Погорелова «Геометрия, 7—9».

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я.72

ISBN 978-5-09-051000-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие содержит дополнительный материал по курсу геометрии IX класса. Оно ориентировано на учебник А. В. Погорелова «Геометрия, 7—9» (М.: Просвещение, 1990).

Пособие включает 20 самостоятельных работ, составленных как к основным пунктам учебного пособия по геометрии, так и ко всем его параграфам, 15 дифференцированных заданий по основным разделам курса, систему дополнительных задач к каждому параграфу пособия из раздела 9 класса и дополнительных задач по всему курсу геометрии 7—9 классов.

Основной целью пособия является помощь учителю в организации самостоятельной работы и контроля знаний учащихся на уроках и вне их. Задания составлены с учетом выделения главных и наиболее важных разделов курса. Самостоятельные работы предназначены для обучения девятиклассников самостоятельному решению задач по только что изученному материалу, способствуют его повторению и закреплению. Задачи, помещенные в работах, могут быть также использованы как индивидуальные задания при опросе и в качестве домашних заданий. Многие из предлагаемых заданий помогают отрабатывать практические умения и навыки учащихся, однако учителю каждый раз следует внимательно следить за обоснованностью и четкостью выводов.

Самостоятельные работы составлены практически ко всем пунктам § 11—15 учебника, которые изучаются в 9 классе. Часть из них посвящена материалу одного пункта, остальные охватывают два и более пунктов.

Достаточно полное представление о содержании той или иной самостоятельной работы дает следующее распределение их по темам и параграфам.

С-1. Преобразование подобия.

С-2. Признаки подобия треугольников.

С-3. Подобие прямоугольных треугольников.

С-4. Углы, вписанные в окружность.

С-5. Подобие фигур (§ 11).

С-6. Теорема косинусов.

С-7. Теорема синусов.

С-8. Решение треугольников (§ 12).

С-9. Выпуклые многоугольники.

С-10. Правильные многоугольники.

С-11. Длина окружности. Подобие правильных многоугольников.

С-12. Многоугольники (§ 13).

С-13. Площади параллелограмма и треугольника.

С-14. Площадь трапеции.

С-15. Площади подобных фигур.

С-16. Площадь круга.

С-17. Площади фигур (§ 14).

С-18. На плоскости и в пространстве.

С-19. Сечение куба плоскостями.

С-20. Тела вращения.

Каждая самостоятельная работа рассчитана на 10—15 мин. С целью учета индивидуальных особенностей школьников самостоятельные работы даются в четырех вариантах, причем первый из них самый простой, а четвертый — наиболее сложный. Второй и третий варианты имеют промежуточную сложность и являются примерно равноценными, что позволяет использовать их одновременно. В случае необходимости можно, конечно, использовать одновременно и работы разной сложности, включая и наиболее простую. Но это вовсе не предполагает деление класса на слабых, средних и сильных учащихся. Наоборот, такое деление является весьма условным и должно рассматриваться как временное. Распределение вариантов между учащимися различных групп при проведении каждой самостоятельной работы должно быть подчинено цели обеспечения условий для поступательного развития способностей всех без исключения учащихся, с одной стороны, и сближения уровней развития отдельных учащихся — с другой. Критерий такого распределения сводится к тому, чтобы для каждого ученика работа была посильна, т. е. реально выполнима, но требовала напряжения и усилий для ее выполнения. Поэтому важно не пропустить момент, когда варианты средней сложности станут посильными для конкретного слабоуспевающего ученика, а четвертый вариант — для среднеуспевающего. Надо поставить обучение так, чтобы всем было интересно, чтобы временно слабый тянулся к уровню среднего, средний — к уровню сильного, а сильный ученик стремился к совершенствованию. Тогда даже самый слабый ученик поверит в свои способности.

Работы содержат задачи на вычисления, построение и доказательство (для удобства задачи одного типа, как правило, имеют одинаковый номер во всех вариантах одного задания). Предполагается, что учитель во время выполнения учащимися самостоятельной работы будет, если это окажется необходимым, и консультировать учеников. Таким образом, самостоятельные работы носят, как правило, обучающий характер. Поэтому учитель в зависимости от поставленной им цели и от подготовки учащихся может предложить для решения в классе лишь часть из заданий той или иной самостоятельной работы.

Если в условии задачи не говорится, при помощи каких инструментов следует выполнять построение, то ученик может воспользоваться любым из инструментов: линейкой, циркулем, угольником, транспортиром.

Время, необходимое для выполнения заданий самостоятельных работ, существенно зависит от требований к оформлению решения задач и набора инструментов, с помощью которых выполняются построения. Поэтому учащимся нужно четко указывать эти требования.

При выполнении заданий на построение от учащихся не всегда следует требовать описания построений. При решении задач на вычисление и доказательство учащиеся должны кратко записать решение.

Оценка работы проводится учителем с учетом самостоятельности ее выполнения. Если самостоятельная работа носила обучающий характер, то неудовлетворительные оценки, как правило, не выставляются.

Особое место в системе самостоятельных работ занимают самостоятельные работы к параграфам, которые призваны помочь контролю усвоения всего материала параграфа. Эти работы требуют для своего выполнения 15—20 мин и могут рассматриваться как подготовительные к выполнению контрольных работ. Учитель по своему усмотрению может использовать задания, помещенные в этих работах, при составлении контрольных работ.

Дифференцированные задания являются естественным продолжением и развитием самостоятельных работ. Но если разделение на варианты при составлении и проведении самостоятельных работ сталкивается с трудностями учета индивидуальных особенностей учащихся, то дифференцированные задания учитывают их автоматически. В то же время дифференцированные задания предполагают более высокий уровень развития учащихся, так как всецело направлены на развитие у них логического мышления.

Цель дифференцированных заданий состоит в том, чтобы не только способствовать развитию логического мышления школьников, но и контролировать уровень такого развития, что очень важно для всего учебного процесса. Структура заданий позволяет выявить учащихся, склонных к дедуктивному мышлению, способствует дальнейшему их развитию и помогает подтянуть до более высокого уровня остальных.

Такие задания приучают к последовательности в мышлении, к его четкости и точности.

Имеются дифференцированные задания двух типов. В заданиях Д-1, Д-3, Д-4, Д-5, Д-6, Д-7, Д-9, Д-10, Д-12, Д-13 требуется доказать по четыре утверждения. Первое утверждение самое простое, а четвертое наиболее сложное (оно предназначено только для сильных учащихся). Доказательство каждого последующего утверждения опирается на предыдущие. Кроме того, в отдельных случаях ученикам даются по ходу и другие указания. В заданиях Д-2, Д-8, Д-11, Д-14, Д-15 предлагается найти по два или три существенно различных доказательства одного и того же утверждения (сильные учащиеся могут найти больше таких доказательств). Если дифференцированные задания первого типа можно квалифицировать как обучающие (умению аргументировать, доказывать) задания, то задания второго типа являются творческими, так как в них учащимся надо найти идею и схему доказательства, двух доказательств (в задании первого типа схема доказательства последующих утверждений определяется структурой самого задания).

Возможны различные организационные формы выполнения дифференцированных заданий: классная или домашняя работа, классно-домашняя работа. При выборе формы проведения следует иметь в виду, что дифференцированные задания не должны подменять программный материал. Они являются лишь дополнением к нему.

Раздел «Дополнительные задачи» развивает систему задач, имеющихся в учебнике А. В. Погорелова. Эти задачи распределены по параграфам и снабжены в случае необходимости ответами, указаниями или решениями. Они могут быть предложены для самостоятельной работы учащимся, успешно справляющимся с задачами учебника. Кроме этого, данная система задач может быть рекомендована для проведения кружковых занятий и при организации факультативов. Особенно сложные задачи отмечены звездочкой (*).

Кроме этого, в пособие включен раздел «Различные задачи по курсу геометрии 7—9 классов». Этот раздел вместе с дополнительными задачами, данными нами к каждому из классов, призван помочь организовать повторение материала всех разделов курса геометрии 7—9 классов, подготовить учащихся к экзаменам, организовать кружковую и факультативную работу по геометрии с учащимися.

В этом издании мы помещаем контрольные работы. Сформулируем требования, которыми мы руководствовались при составлении этих контрольных работ.

К-1. Подобие фигур. К обязательным результатам при выполнении этой работы следует отнести: определение подобных треугольников, знание признаков подобия треугольников, умение применять эти признаки в наиболее простых ситуациях. Кроме этого, здесь проверяется понимание смысла коэффициента подобия фигур и его использования при определении элементов подобных треугольников.

К-2. Решение треугольников. При определении обязательных результатов обучения в данном разделе можно поступать по-разному: а) можно проверять весь обязательный теоретический материал данного раздела, соответствующий изложению материала в учебнике (так мы поступаем в данной контрольной работе); б) можно относить к обязательным результатам только прямое использование теорем косинусов и синусов, и тогда задания для проверки обязательных результатов обучения следует изменять. Следует дополнительно отметить, что варианты данной контрольной работы составлены так, что они проверяют владение соотношениями между сторонами и углами в треугольнике, так как на практике понимание этих соотношений предшествует всей технической работе по решению треугольников.

К-3. Многоугольники. Раздел «Многоугольники» в учебнике А. В. Погорелова содержит большой материал, в котором, кроме непосредственно многоугольников, изучают длину окружности, центральные углы и дуги окружности и т. д. В нашей контрольной работе проверяется в основном материал пункта «Правильные многоугольники». Рассматриваются правильные многоугольники, вписанные или описанные около окружности, после чего просят найти радиус соответствующей окружности, а также длину стороны некоторого правильного многоугольника, вписанного или описанного около данной окружности.

К-4. Площади фигур. На уровне проверки обязательных результатов обучения в данной контрольной работе проверяется владение учащимися основными формулами вычисления площадей простейших фигур: прямоугольника, квадрата, параллелограмма, треугольника. При этом проверяется владение формулой не только для нахождения площади, но и для нахождения элемента фигуры по известной площади. В некоторых задачах проверяется владение формулой площади круга (однако при этом требуется уметь находить радиус соответствующего круга). Учитель, ориентируясь на возможности определенной группы учащихся в классе, может упростить задания этого уровня.

Для лучшей организации итогового повторения курса планиметрии предлагаются также дополнительные контрольные работы.

К-5. Преобразование подобия. Охватывает весь теоретический материал пунктов 100—105 учебника.

К-6. Площадь треугольника, трапеции и круга. Кроме заданий на вычисление площадей указанных фигур, содержит одно задание на доказательство равновеликости двух фигур.

К-7. Итоговая (годовая) контрольная работа. Работа содержит задания, касающиеся подобия прямоугольных треугольников и решения произвольных треугольников, а также задания на вычисление длины окружности и площади круга.

В конце пособия приводятся ответы и указания ко всем самостоятельным работам и дифференцированным заданиям и даются методические рекомендации к ним. Там же даются и ответы к контрольным работам.

Авторы выражают благодарность учителю математики школы № 969 Москвы Л. А. Воробьевой за помощь при составлении и экспериментальной проверке контрольных работ.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С-1

1. Даны точки A и O. Постройте точку A', в которую переходит точка A при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии, равным 2.

2. Стороны треугольника $a=5$ см, $b=4{,}6$ см и $c=2{,}5$ см. Найдите стороны a' и c' подобного ему треугольника, если $b'=2{,}3$ см.

С-2

1. Стороны двух треугольников равны соответственно 7,5 дм, 6 дм, 7,2 дм и 25 мм, 20 мм, 24 мм. Подобны ли эти треугольники?

2. Докажите, что равнобедренные треугольники подобны, если угол при основании одного из них равен углу при основании другого.

С-3

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CD. Найдите его гипотенузу AB, если $AC=10$ см, $AD=4$ см.

2. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную из вершины прямого угла, если ее основание делит гипотенузу на отрезки 4 см и 9 см.

С-4

1. Угол ABC вписан в окружность. Чему он равен, если соответствующий ему центральный угол равен 88°?

2. Центром окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, является середина его основания BC. Найдите углы треугольника ABC.

С-5

1. Даны луч AB и точка O. Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром O перейдет этот луч, если коэффициент гомотетии равен 2.

2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$ см, $MK = 4$ см, $AC = 7$ см.

3. Углы B и B_1 у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны треугольника ABC, сходящиеся в вершине B, в 2,5 раза больше соответствующих сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите A_1C_1, если $AC = 10$ см.

С-6

1. Стороны треугольника равны 9 см, 12 см и 14 см. Какой угол (острый, прямой или тупой) лежит против стороны, равной 14 см?

2. Стороны параллелограмма равны 4 см и 5 см, а острый угол — 52°. Найдите его диагональ, соединяющую вершины острых углов.

С-7

1. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $\angle C = 30°$, $\angle B = 45°$. Найдите сторону AC.

2. В треугольнике PQR $PQ = 7{,}5$ м, $QR = 9{,}4$ м, $PR = 11{,}3$ м. Какой угол треугольника наибольший, какой — наименьший?

С-8

1. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 80°$. Какая сторона треугольника больше: AB или AC?

2. Стороны треугольника равны 8 см, 15 см и 17 см. Найдите его угол, лежащий против большей стороны.

С-9

1. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 2, 2, 3, 5.

2. Сумма углов выпуклого многоугольника в 2 раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Найдите число сторон этого многоугольника.

С-10

1. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 1 см. Чему равен радиус окружности, описанной около него?

2. Постройте правильный четырехугольник, вписанный в окружность.

С-11

1. Радиус окружности 5 см. Чему равна ее длина?

2. Сторона одного квадрата в три раза больше стороны другого квадрата. Как относятся радиусы окружностей, описанных около них и вписанных в них? Ответ объясните.

С-12

1. Сторона правильного шестиугольника равна a. Найдите его диагонали.

2. Радиус окружности равен 2 см. Чему равна длина дуги этой окружности, соответствующей центральному углу в 90°?

С-13

1. Стороны параллелограмма равны 4 см и 6 см. Меньшая его высота равна 3 см. Вычислите вторую высоту параллелограмма.

2. Произведя необходимые построения и измерения в данном треугольнике, вычислите его площадь.

С-14

1. В равнобокой трапеции, один из углов которой равен 45°, большее основание равно 70 см, а высота равна 10 см. Вычислите площадь трапеции.

2. Произведя необходимые построения и измерения в данной трапеции, вычислите ее площадь.

С-15

1. Стороны четырехугольника равны 20 см, 8 см, 16 см и 12 см. Наибольшая сторона подобного ему четырехугольника равна 10 см. Вычислите длины остальных его сторон. Во сколько раз площадь второго четырехугольника меньше площади первого?

2. Соответственные стороны двух подобных многоугольников равны 3 см и 2 см. Площадь меньшего из этих многоугольников равна 50 см^2. Вычислите площадь большего многоугольника.

С-16

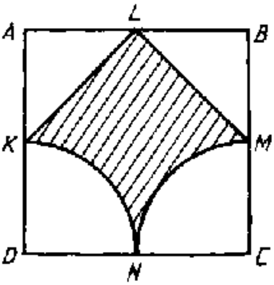


Рис. 1

1. Длина окружности круга равна π см. Найдите площадь этого круга.

2. $ABCD$ — квадрат со стороной a, $AL = LB$, KN и NM — дуги с центрами в точках D и C радиуса, равного AL (рис. 1). Выразите через a площадь заштрихованной фигуры.

С-17

1. Стороны прямоугольника относятся как $8:15$, а его диагональ равна 34 см. Найдите площадь прямоугольника.

2. Площадь кругового кольца, заключенного между двумя окружностями с одним и тем же центром, равна 6 м^2. Найдите радиусы этих окружностей, если один из них в 2 раза больше другого.

С-18

1. Треугольники ABC и DBC равны. Пересекаются ли прямые AD и BC, если данные треугольники лежат в одной плоскости?

2. Пересекаются ли прямые AD и BC, если равные треугольники ABC и DBC не лежат в одной плоскости?

С-19

Может ли сечение куба плоскостью быть:

1. квадратом? правильным треугольником?
2. восьмиугольником?

С-20

1. Периметр осевого сечения конуса равен 16 см, высота — 2 см. Найдите радиус основания данного конуса.

2. Прямоугольник вращается вокруг одной из своих сторон. Вокруг какой стороны (большей или меньшей) надо вращать данный прямоугольник, чтобы получить цилиндр с большим объемом?

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 2

С-1

1. Даны точки A, B и O. Постройте точки, в которые перейдут данные точки A и B при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии $\frac{1}{2}$.

2. Стороны данного треугольника 7 см, 5 см и 4 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если меньшая его сторона равна 1,5 см.

С-2

1. Стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4, 6. Какими будут стороны подобного ему треугольника с периметром 58,5 см?

2. Два угла треугольника равны $54°$ и $18°$. Докажите, что биссектрнса, проведенная из вершины третьего угла, отсекает треугольник, подобный исходному.

С-3

1. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если их проекции на гипотенузу равны 36 см и 64 см.

2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна $4\frac{8}{13}$ см, проекция одного из катетов на нее — $11\frac{1}{13}$ см. Найдите все стороны этого треугольника.

С-4

1. Точки A, B и C лежат на окружности с центром O. Чему равен угол ABC, если $\angle AOC = 84°$, а точки B и O лежат по разные стороны от прямой AC?

2. Хорды окружности AB и CD пересекаются. Найдите угол BAD, если $\angle ACD = 40°$, $\angle ADB = 60°$.

С-5

1. Даны треугольник ABC и точка O внутри его. Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром O перейдет этот треугольник, если коэффициент гомотетии равен 1,5.

2. Докажите, что у подобных треугольников биссектрисы, проведенные из соответствующих вершин, относятся как их соответствующие стороны.

3. У треугольника ABC $AB = 15$ см, $AC = 20$ см, $BC = 10$ см. На стороне AB отмечена точка P, на стороне AC — точка Q. Найдите длину отрезка PQ, если $AP = 9$ см, $AQ = 12$ см.

С-6

1. Стороны треугольника равны 0,3 см, 0,4 см и 0,5 см. Не вычисляя углы треугольника, определите его вид.

2. В треугольнике ABC $BC = 0{,}5$ см, $AB = 0{,}4$ см, $\cos B = 0{,}881$. Найдите сторону AC этого треугольника.

С-7

1. В треугольнике CDM $CD = 10$ см, $\angle D = 45°$, $\angle M = 60°$. Найдите сторону CM.

2. Стороны треугольника равны 7 см и 9 см. Может ли угол, противолежащий стороне 7 см, быть тупым? Почему?

С-8

1. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 12$ см. Может ли $\sin C = 0{,}7$?

2. В треугольнике PQR $PQ = 45$ см, $PR = 7{,}3$ см, $\angle P = 42°$. Найдите сторону RQ этого треугольника.

С-9

1. Найдите углы выпуклого пятиугольника, если они пропорциональны числам 1, 3, 5, 7, 11.

2. Сумма углов выпуклого n-угольника равна сумме его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Найдите n.

С-10

1. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 6 см. Найдите радиус окружности, вписанной в него.

2. Опишите около данной окружности правильный шестиугольник.

С-11

1. Найдите длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см.

2. Дан равносторонний треугольник. Как относятся радиусы окружностей, вписанных в данный треугольник и треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного равностороннего треугольника?

С-12

1. Сторона правильного восьмиугольника $ABCDMNKP$ равна b. Найдите его диагональ AD.

2. Дуга окружности, соответствующая центральному углу в 72°, равна 3 дм. Чему равен радиус окружности?

С-13

1. Бóльшая сторона параллелограмма 5 см, высоты параллелограмма 2 см и 2,5 см. Вычислите вторую сторону параллелограмма.

2. Произведя необходимые построения и измерения в данном треугольнике, вычислите его площадь.

С-14

1. Боковая сторона трапеции, равная 40 см, образует с бóльшим ее основанием угол в 45°. Вычислите площадь трапеции, если основания ее равны 24 см и 60 см.

2. Произведя необходимые построения и измерения в данной трапеции, вычислите ее площадь.

С-15

1. Дан план четырехугольного земельного участка, выполненный в масштабе 1 : 1000. Произведя необходимые построения и измерения, вычислите площадь этого участка.

2. Стороны четырехугольника равны 11 см, 3 см, 6 см и 7 см. Периметр подобного ему четырехугольника равен 216 см. Вычислите стороны второго четырехугольника. Во сколько раз площадь второго четырехугольника больше площади первого?

С-16

1. Вычислите отношение площади квадрата к площади вписанного в него круга.

2. ABC — правильный треугольник со стороной b. Радиус дуг KL, LM и MK равен $b/2$ (см. рис. 2). Выразите через b площадь заштрихованной фигуры.

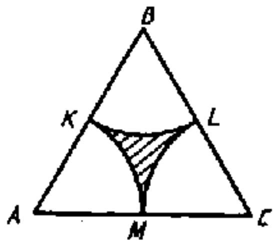


Рис. 2

С-17

1. Дана трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Докажите, что треугольники ABD и BAC имеют равные площади.

2. Вычислите площадь круга, если она больше площади вписанного в него квадрата на 456 см^2.

С-18

1. Треугольники ABC и DCB равны. Могут ли данные треугольники лежать в одной плоскости, если отрезки AD и BC не пересекаются?

2. Даны точки A, B, C и D, первые три из которых являются вершинами правильного треугольника со стороной 5 см, а точка D находится от первых двух на том же расстоянии, что и точка C. Может ли расстояние между точками C и D быть меньшим 5 см, если все данные точки лежат в одной плоскости?

С-19

Может ли сечение куба плоскостью быть:

1. прямоугольником, не являющимся квадратом?

2. параллелограммом, не являющимся ромбом и прямоугольником?

С-20

1. Диагональ осевого сечения цилиндра 50 см, радиус основания на 10 см больше его образующей. Найдите площадь осевого сечения данного цилиндра.

2. Прямоугольный треугольник вращается вокруг одного из своих катетов. Вокруг какого катета (большего или меньшего) надо вращать данный прямоугольный треугольник, чтобы получить конус с бóльшим объемом?

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 3

С-1

1. Даны точки C, D и O. Постройте точки, в которые перейдут точки C и D при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии $\frac{3}{2}$.

2. Стороны данного треугольника 6 см, 4 см и 3 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, если наибольшая его сторона равна 3,5 см.

С-2

1. Стороны треугольника пропорциональны числам 5, 6, 8. Вычислите длины сторон треугольника, подобного данному, если разность между наибольшей и наименьшей его сторонами равна 15 см.

2. Углы треугольника пропорциональны числам 6, 3, 1. Докажите, что биссектриса, проведенная из вершины наибольшего угла, отсекает от данного треугольника треугольник, подобный ему.

С-3

1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 10 дм, его проекция на гипотенузу — 8 дм. Найдите второй катет и гипотенузу.

2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна $7\frac{1}{17}$ дм, проекция одного из катетов на гипотенузу — $13\frac{4}{17}$ дм. Найдите все стороны этого треугольника.

С-4

1. Точки A, B и C лежат на окружности с центром O. Чему равен угол ABC, если $\angle AOC = 146°$, а точки B и O лежат по одну сторону от прямой AC?

2. Хорды окружности AC и BD пересекаются. Найдите угол BAD, если $\angle ACD = 70°$, $\angle ADB = 50°$.

С-5

1. Даны треугольник MKC и точка O вне его. Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром O перейдет этот треугольник, если коэффициент гомотетии равен 0,5.

2. Докажите, что у подобных треугольников медианы, проведенные из соответствующих вершин, относятся как их соответствующие стороны.

3. Найдите сторону квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 6 см и имеющего с данным треугольником общий прямой угол.

С-6

1. Стороны треугольника равны 7 см, 8 см и 12 см. Не вычисляя углы треугольника, определите его вид.

2. В треугольнике ABC $AC = 15$ см, $BC = 10$ см, $\cos C = -0{,}53$. Найдите сторону AB этого треугольника.

С-7

1. В треугольнике KPD $PD = 6$ см, $\angle K = 60°$, $\angle P = 45°$. Найдите сторону KD.

2. Стороны треугольника равны 8 см и 6 см. Может ли угол, противолежащий стороне, равной 6 см, быть прямым? Почему?

С-8

1. В треугольнике ABC $AC = 11$ см, $BC = 4$ см. Может ли $\sin A = 0{,}4$?

2. В треугольнике MKE $\angle M = 67°$, $MK = 5{,}6$ см, $ME = 4{,}2$ см. Найдите сторону KE этого треугольника.

С-9

1. Найдите углы выпуклого шестиугольника, если они пропорциональны числам 2, 4, 4, 6, 8, 12.

2. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, на 180° меньше суммы его внутренних углов. Найдите число сторон этого многоугольника.

С-10

1. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен 1,5 см. Найдите радиус окружности, описанной около него.

2. Впишите в данную окружность правильный восьмиугольник.

С-11

1. Найдите длину окружности, описанной около прямоугольника со сторонами 5 см и 12 см.

2. Дан равносторонний треугольник. Как относятся радиусы окружностей, описанных около данного треугольника и треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного равностороннего треугольника?

С-12

1. Сторона правильного восьмиугольника равна b. Найдите его наибольшую диагональ.

2. Дуга окружности, соответствующая центральному углу в 250°, равна 4 дм. Чему равен радиус окружности?

С-13

1. Площадь параллелограмма равна 24 см^2, каждая из его сторон равна 6 см. Найдите расстояние между противоположными сторонами параллелограмма.

2. Произведя необходимые построения и измерения в данном треугольнике, вычислите его площадь.

С-14

1. Боковая сторона трапеции, равная 20 см, образует с меньшим ее основанием угол в 150°. Вычислите площадь трапеции, если ее основания равны 12 см и 30 см.

2. Произведя необходимые построения и измерения в данной трапеции, вычислите ее площадь.

С-15

1. План четырехугольного земельного участка выполнен в масштабе 1:5000. Произведя необходимые построения и измерения, вычислите его площадь.

2. Стороны четырехугольника равны 2 см, 3 см, 4 см и 5 см. Второй четырехугольник подобен ему, причем сумма наибольшей и наименьшей его сторон равна 28 см. Вычислите стороны второго четырехугольника. Во сколько раз площадь второго четырехугольника больше площади первого?

С-16

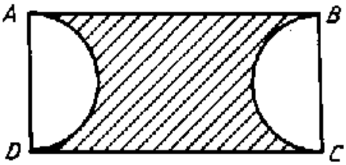


Рис. 3

1. Вычислите отношение площади квадрата к площади описанного около него круга.

2. $ABCD$ — прямоугольник со сторонами a и $2a$, $\smile AD = \smile BC = 180°$ (рис. 3). Выразите через a площадь заштрихованной фигуры.

С-17

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ABO и CBO имеют равные площади.

2. Вычислите площадь круга, если она меньше площади описанного около него квадрата на 86 см^2.

С-18

1. Треугольники ABC и DBC равны. Могут ли данные треугольники лежать в одной плоскости, если отрезки AD и BC не пересекаются?

2. Даны точки A, B, C и D, первые три из которых являются вершинами правильного треугольника со стороной 10 см, а точка D находится от первых двух на том же расстоянии, что и точка C. Может ли расстояние между точками C и D быть меньшим 10 см, если данные четыре точки не лежат в одной плоскости?

С-19

Может ли сечение куба плоскостью быть:
1. ромбом, не являющимся квадратом?
2. трапецией?

С-20

1. Периметр и диагональ осевого сечения цилиндра равны 62 дм и 25 дм соответственно. Найдите площадь осевого сечения данного цилиндра.

2. Прямоугольный треугольник вращается вокруг одного из своих катетов. Вокруг какого катета (меньшего или большего) надо вращать данный прямоугольный треугольник, чтобы получить конус с меньшей площадью боковой поверхности?

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 4

С-1

1. Дан четырехугольник $ABCD$. Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром A перейдет этот четырехугольник, если коэффициент гомотетии равен 2,5.

2. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

С-2

1. Основание треугольника 5 см, высота, проведенная к этому основанию, равна 3 см. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие — на боковых сторонах. Вычислите сторону квадрата.

2. В остроугольном треугольнике проведены две высоты. Докажите, что получившаяся фигура содержит два подобных треугольника с общей вершиной.

С-3

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 дм и 40 дм. Чему равна высота этого треугольника, опущенная на гипотенузу?

2. Выразите высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, через его катеты a и b.

С-4

1. Точки A, B и C лежат на окружности с центром O. Найдите угол AOC, если $\angle ABC = 99°$.

2. Три вершины прямоугольника лежат на окружности. Докажите, что и четвертая вершина прямоугольника лежит на этой окружности.

С-5

1. Докажите, что при гомотетии прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).

2. Найдите отношение высот треугольника, проведенных к его сторонам a и b.

3. У треугольника ABC $AB=15$ м, $AC=20$ м, $BC=30$ м. На стороне AB отложен отрезок $AD=8$ м, а на стороне AC — отрезок $AE=6$ м. Найдите длину отрезка ED.

С-6

1. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Не вычисляя углы треугольника, определите его вид.

2. Две силы $P=100$Н и $Q=200$Н приложены к материальной точке O и составляют угол в 50°. Найдите величину равнодействующей R и угол, который она составляет с одной из сил (P или Q).

С-7

1. В треугольнике KLM углы K, L и M относятся как числа 4, 2 и 3, $LM=8$ см. Найдите стороны KL и KM.

2. Стороны треугольника равны 4 см, 5 см и 6 см. Может ли угол, противолежащий стороне 4 см, быть большим 60°? Почему?

С-8

1. Докажите, что та из диагоналей параллелограмма больше, которая соединяет вершины острых углов.

2. В треугольнике APQ $\angle A=78°$, $AP=5{,}8$ см, $PQ=8{,}9$ см. Найдите сторону AQ и угол P этого треугольника.

С-9

1. Докажите, что число прямых углов выпуклого n-угольника при $n>4$ меньше четырех.

2. Сумма углов выпуклого многоугольника на 720° больше суммы его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Найдите число сторон этого многоугольника.

С-10

1. Радиус окружности, описанной около правильного восьмиугольника, равен 2 см. Найдите радиус окружности, вписанной в него.

2. Через середины двух смежных сторон правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса R, проведена хорда. Найдите эту хорду, если $R = 3$ см.

С-11

1. Найдите длину окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 4 см, и длину окружности, вписанной в этот треугольник.

2. Дан квадрат. Докажите, что середины его сторон являются вершинами другого квадрата. Как относятся радиусы окружностей, вписанных в эти квадраты и описанных около них?

С-12

1. Диагональ правильного пятиугольника $ABCDE$ равна d. Его стороны продолжены до пересечения друг с другом так, что получилась пятиконечная звезда. Найдите расстояние между двумя ее вершинами, лежащими на прямой AB.

2. Дуга окружности, соответствующая центральному углу в 240°, равна 4 м. Найдите хорду, стягивающую концы этой дуги.

С-13

1. Одна из сторон параллелограмма в 3 раза больше проведенной к ней высоты. Вычислите их, если площадь параллелограмма равна 48 см^2.

2. Произведя необходимые построения и измерения в данном треугольнике, вычислите его площадь. Решите задачу несколькими способами.

С-14

1. Основания трапеции равны 10 см и 20 см. Диагональ трапеции отсекает от нее прямоугольный равнобедренный треугольник, гипотенузой которого является меньшее основание трапеции. Вычислите площадь этой трапеции.

2. Произведя необходимые построения и измерения в данной трапеции, вычислите ее площадь. Решите задачу двумя способами.

С-15

1. Трапеция равновелика треугольнику, образованному продолжениями ее боковых сторон и меньшим основанием. Чему равно отношение длин оснований этой трапеции?

2. Параллельно основанию треугольника проведена прямая, делящая боковую сторону этого треугольника в отношении 3:5 (считая от вершины). Разность площадей получившихся трапеции и треугольника равна 69 см^2. Вычислите площадь данного треугольника.

С-16

1. Вычислите отношение площади правильного шестиугольника к площади вписанного в него круга.

2. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник со стороной a и центром O. Дуги BF и CE с центрами в точках A и D касаются в точке O (рис. 4). Найдите площадь заштрихованной фигуры.

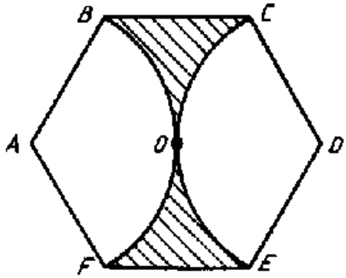


Рис. 4

С-17

1. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и BOC имеют равные площади.

2. В равнобокую трапецию с боковой стороной, равной 3 см, вписан круг. Найдите площадь этого круга, если площадь трапеции равна 6 см^2.

С-18

1. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с соответственно параллельными сторонами, причем $AB \neq A_1B_1$. Докажите, что если данные треугольники не лежат в одной плоскости, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

2. Докажите утверждение предыдущего задания для случая, когда данные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в одной плоскости.

С-19

Может ли сечение куба плоскостью быть:

1. правильным пятиугольником?
2. правильным шестиугольником?

С-20

1. Найдите угол между образующей конуса и его основанием, если площадь осевого сечения данного конуса равна площади квадрата со стороной, равной радиусу его основания.

2. Прямоугольник вращается вокруг одной из своих сторон. Вокруг какой стороны (меньшей или большей) надо вращать данный прямоугольник, чтобы получить цилиндр с меньшей площадью полной поверхности?

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ

Д-1. Преобразование подобия

1. Докажите, что при преобразовании подобия ромб переходит в ромб.

2. Докажите, что при гомотетии ромб переходит в ромб.

3. Впишите в данный треугольник ромб так, чтобы он имел с треугольником один общий угол.

4. Впишите в данный треугольник равносторонний треугольник так, чтобы на каждой стороне первого лежала одна вершина второго.

Д-2. Подобные треугольники

1. Докажите, что середины сторон треугольника являются вершинами подобного ему треугольника. Приведите три доказательства, опирающиеся на разные признаки подобия треугольников.

2. Стороны треугольника — a, b, c. В треугольник вписан ромб, имеющий с ним общий угол. Найдите сторону ромба. (Рассмотрите три случая.)

Дополнительный вопрос. В каком отношении биссектриса угла треугольника делит сторону треугольника, к которой она проведена?

Д-3. Подобие прямоугольных треугольников

У прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C $AC=6$ см, $BC=8$ см.

1. Найдите высоту CD треугольника ABC.

2. Найдите высоту DE треугольника BCD.

3. Найдите высоту EF треугольника DBE.

4. Найдите длину отрезка DF, если в исходном треугольнике $AC=b$, $BC=a$.

Д-4. Углы, вписанные в окружность

1. Углы ABC и ADC вписаны в окружность так, что их вершины B и D лежат на одной и той же дуге окружности с концами A и C, причем угол BAC больше угла DAC. Докажите, что угол DCA больше угла BCA.

2. Докажите, что если выполняются все условия предыдущего задания, то отрезки AD и BC пересекаются.

3. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Докажите, что его вершины K и M лежат по разные стороны относительно прямой LN.

4. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противолежащих углов равна 180°.

Д-5. Соотношения между сторонами и углами в произвольном треугольнике

1. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, а $\angle C = 70°$. Какая сторона больше: AB или AC?

2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD образует со стороной AB бо́льший угол, чем со стороной BC. Докажите, что $BC > AB$.

3. В треугольнике ABC медиана BM образует со стороной AB бо́льший угол, чем со стороной BC. Докажите, что $BC > AB$.

4. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не превосходит наибольшей из его сторон.

Д-6. Соотношения между сторонами и углами в произвольном треугольнике

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что если $BC > AB$, то угол BDC — тупой.

2. Докажите, что в предыдущем задании середина стороны AC принадлежит лучу DC. Указание. Воспользуйтесь утверждением о свойстве биссектрисы треугольника (п. 106 учебника).

3. Докажите, что биссектриса треугольника не больше его медианы, проведенной из той же вершины.

4. Докажите, что в любом (не равнобедренном) треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Д-7. Длина ломаной

1. Докажите, что длина ломаной $A_1A_2A_3A_4$ больше длины ломаной $A_1A_3A_4$ (рис. 5).

2. Докажите, что длина ломаной $A_1A_2A_3$ меньше длины ломаной A_1BCA_3 (рис. 6).

3. Докажите, что длина ломаной $A_1A_2A_3$ не больше длины ломаной $A_1B_1B_2B_3B_4A_3$ (рис. 7).

4. Можно ли усилить предыдущее утверждение, т. е. можно ли доказать, что длина ломаной $A_1A_2A_3$ меньше длины ломаной $A_1B_1B_2B_3B_4A_3$? Ответ объясните.

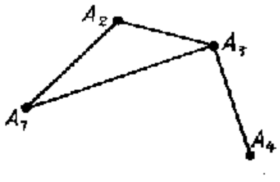


Рис. 5

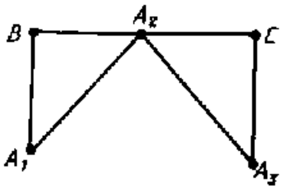


Рис. 6

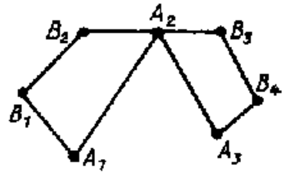


Рис. 7

Д-8. Правильные многоугольники

Докажите, что взятые через одну вершины правильного восьмиугольника являются вершинами квадрата. Дайте два различных доказательства.

Д-9. Площадь треугольника

1. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 2 см, а угол при основании — 75°. Чему равна площадь треугольника?

2. В равнобедренном треугольнике основание равно a, а противолежащий ему угол — 60°. Найдите площадь треугольника.

3. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 24 см и боковой стороной 13 см.

4. Площадь параллелограмма со сторонами 5 см и 6 см равна 24 см². Найдите диагонали параллелограмма.

Д-10. Площади простых фигур

1. Диагонали параллелограмма равны 6 см и 4 см, а один из углов между ними — 150°. Найдите площадь параллелограмма.

2. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 5 см, а ее диагональ делит среднюю линию на отрезки 3 см и 7 см. Чему равна площадь трапеции?

3. Трапеция разбита на параллелограмм и треугольник, площади которых одинаковы (рис. 8). Чему равно большее основание трапеции, если меньшее основание равно 3 см?

Рис. 8

4. В равнобокую трапецию вписана окружность, касающаяся всех ее сторон. Боковая сторона трапеции равна 4 см, а угол при большем основании — 30°. Найдите площадь трапеции.

Д-11. Равновеликие треугольники

В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB_1 и BOA_1 равновелики, т. е. имеют равные площади. Дайте два различных доказательства.

Дополнительное задание. Докажите, опираясь на свойства площади, что третья медиана данного треугольника тоже проходит через точку O.

Д-12. Площадь круга и его частей

1. Даны две окружности с центром O, радиус одной из которых в 2 раза больше, чем другой; AB — касательная к окружности меньшего радиуса (рис. 9). Докажите, что площадь части кругового кольца, лежащего внутри центрального угла AOB (на рисунке она заштрихована), в 3 раза больше площади сектора меньшего круга, лежащего внутри того же угла.

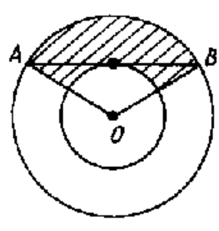


Рис. 9

2. Найдите площадь сегмента, отсекаемого от большего круга из предыдущего задания касательной AB. Радиус круга $OA = R$.

3. Каждая из двух окружностей радиуса R проходит через центр другой. Найдите площадь общей части двух кругов, ограничиваемых этими окружностями.

4. Стороны треугольника равны 25 см, 29 см и 36 см. Найдите площадь фигуры, заключенной между двумя окружностями: вписанной в этот треугольник и описанной около него.

Д-13. Скрещивающиеся прямые

1. Прямые a и b скрещивающиеся. Прямая c пересекает прямую a в точке A, а прямую b в точке B. Через точку C прямой c, отличную от точек A и B, проведена прямая d. Может ли прямая d пересекать прямые a и b?

2. Прямые A_1A_2 и B_1B_2 скрещивающиеся. Докажите, что отрезки A_1B_1 и A_2B_2, а также отрезки A_1B_2 и A_2B_1 не пересекаются.

3. Прямые a_1 и a_2 пересекают каждую из прямых b_1 и b_2. Докажите, что если прямые a_1 и a_2 скрещивающиеся, то прямые b_1 и b_2 тоже скрещивающиеся.

4. Прямые a, b и c попарно скрещивающиеся, а прямые d_1, d_2 и d_3 проходят через одну и ту же точку O. Каждая из прямых d_1, d_2, d_3 пересекает хотя бы две из трех данных попарно скрещивающихся прямых. Докажите, что прямые d_1, d_2 и d_3 не лежат в одной плоскости.

Д-14. Объем призмы

Дана правильная пятиугольная призма со стороной основания a и высотой H. Найдите объем этой призмы двумя различными способами.

Дополнительное задание. Выразите объем данной призмы только через ее линейные размеры a и H.

Д-15. Объем параллелепипеда

Основание наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной a. Две противоположные его боковые грани также являются квадратами, а острый угол граней, не являющихся квадратами, равен α. Найдите объем этого параллелепипеда двумя различными способами.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи к § 11

1. Докажите, что преобразование, обратное преобразованию подобия, является преобразованием подобия.

2. Отрезки, соединяющие данную точку O с точками данной прямой, разделены в одном и том же отношении, считая от точки O. Докажите, что точки деления лежат на одной прямой.

3. 1) Дан угол и внутри его точка M. Проведите через точку M прямую так, чтобы ее отрезок с концами A и B на сторонах угла делился точкой M в отношении 1:2.

2) Решите задачу 1) при условии, что точка M делит отрезок AB в данном произвольном отношении.

4*. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся прямой AB в точке M. Пусть MM_1 — диаметр этой окружности. Докажите, что прямая CM_1 пересекает прямую AB в такой точке C_1, что $AC+AC_1=BC+BC_1$.

5. 1) Используя подобие, докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

2) Основания трапеции равны a и b, сумма углов при основании a равна 90°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований.

6. Дан треугольник ABC. При каком условии можно провести через вершину C прямую, пересекающую отрезок AB в точке C_1 так, чтобы треугольники ACC_1 и BCC_1 были подобны?

7. Может ли медиана треугольника рассечь его на два неравных подобных треугольника?

8. Определите углы равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при основании этого треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному.

9. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB=BC$. Высоты AM и BN не равны. Докажите, что треугольники AMC и ABN подобны.

10. Дан треугольник ABC. Проведены высоты AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке H. Докажите, что $A_1H \cdot A_1A = BA_1 \cdot CA_1$; $B_1H \cdot B_1B = CB_1 \cdot AB_1$.

11. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

12*. Постройте треугольник по трем его высотам.

13. В треугольник ABC вписана окружность. Касательная к окружности, параллельная стороне AB, пересекает отрезки AC и BC соответственно в точках M и N. Выразите отрезок MN через стороны a, b и c данного треугольника.

14. Через точку K пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная AB и пересекающая AC и BC соответственно в точках D и E. Докажите, что $DE = \frac{c(a+b)}{a+b+c}$, где a, b и c — стороны треугольника.

15. Биссектриса AA_1 треугольника ABC пересекает биссектрису CC_1 в точке K. Докажите, что точка K делит биссектрису CC_1 в отношении $CK:KC_1$, равном отношению $(a+b):c$, где a, b, c — стороны треугольника.

16. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC в точке их пересечения делятся в равных отношениях, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

17. Через основание C_1 биссектрисы CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная AC и пересекающая BC в точке D. Выразите отрезок CD через стороны треугольника a, b и c.

18*. Дан треугольник ABC, у которого $\angle B = 90° + \angle A$. Докажите, что стороны a, b и c этого треугольника удовлетворяют соотношению $(b^2 - a^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.

19. Дан треугольник ABC, у которого угол B в два раза больше угла A. Найдите зависимость между сторонами a, b и c этого треугольника.

20. К окружности проведены две параллельные касательные a и b. Третья касательная пересекает a и b соответственно в точках A и B и касается окружности в точке C. Вычислите расстояние между a и b, если $AC = m$, $BC = n$.

21. Даны два подобных прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Докажите, что $aa_1 + bb_1 = cc_1$, где a, b, c — соответственно катеты и гипотенуза первого треугольника, а a_1, b_1, c_1 — второго.

22. Докажите, что расстояние от точки A окружности радиуса R до прямой, содержащей хорду BC, вычисляется по формуле

$$d = \frac{AB \cdot AC}{2R}.$$

23. Касательные в точках A и B окружности пересекаются в точке S. Докажите, что расстояние от любой точки окружности до прямой AB есть среднее пропорциональное ее расстояний до прямых AS и BS.

24. На окружности даны четыре точки A, B, C, D. Докажите, что произведения расстояний от любой точки M окружности до пар прямых AC и BD, BC и AD, CD и AB равны.

25*. На окружности даны точки A и B, на прямой l — точка M. Найдите на окружности такую точку X, чтобы прямые AX и BX пересекали прямую l в точках, находящихся на равных расстояниях от точки M.

26*. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Прямая a пересекает окружности в точках M, N, P и Q, расположенных именно в такой последовательности. Докажите, что $\angle MAN = \angle PAQ$.

27*. Две окружности, касающиеся данной прямой в данных точках, касаются друг друга. Докажите, что геометрическое место точек касания окружностей есть окружность без двух точек.

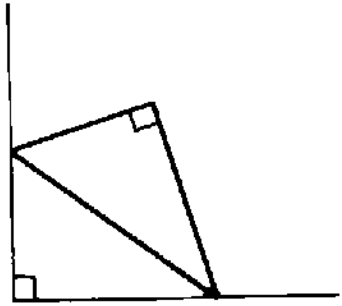


Рис. 10

28*. Вершины острых углов прямоугольного треугольника скользят по сторонам прямого угла (рис. 10). Докажите, что геометрическое место точек, которые пробегает вершина прямого угла треугольника, есть отрезок. Найдите его длину, если гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а катеты — 6 см и 8 см.

29*. Дан равносторонний треугольник ABC. Докажите, что геометрическое место точек M, для которых отрезки, высекаемые на прямых AM и BM сторонами треугольника или их продолжениями, равны, есть прямая и окружность, которые пересекаются.

Задачи к § 12

30. Вычислите длину стороны AB треугольника ABC, если: а) $AC=3$ см, $BC=4$ см, $\angle C=60°$; б) $AC=2$ см, $BC=4$ см, $\angle C=120°$.

31. В треугольнике один из его углов равен α, а стороны, заключающие его, равны a и b. Выразите третью сторону треугольника через a и b, если: а) $\alpha=45°$; б) $\alpha=60°$; в) $\alpha=90°$.

32. Стороны параллелограмма, заключающие угол в 45°, равны 2 см и 3 см. Найдите диагональ, лежащую против этого угла.

33. В треугольнике ABC $AB=3$ см, $BC=4$ см, $AC=6$ см. Вычислите: а) угол A; б) угол C.

34. В параллелограмме $ABCD$ $AB=a$, $BC=b$, $\angle A=30°$. Выразите через a и b диагонали этого параллелограмма.

35. Три равных квадрата расположены так, как показано на рисунке 11. Найдите угол BCA.

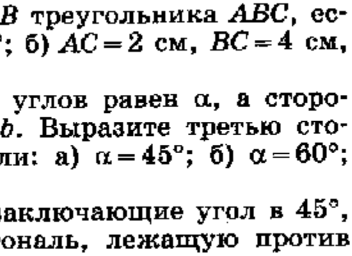


Рис. 11

36. Дан параллелограмм $ABCD$: $\angle BAD=45°$, $AB=a$, $BC=b$. Докажите, что

$$AC^2 \cdot BD^2 = a^4 + b^4.$$

37. Найдите сторону BC треугольника ABC, если: а) $AC = 10$ см, $\angle B = 30°$, $\angle A = 45°$; б) $AB = 20$ см, $\angle C = 135°$, $\angle A = 30°$.

38. Найдите стороны AB и BC треугольника ABC, если: а) $AC = 5$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$; б) $AC = 1$ см, $\angle A = 100°$, $\angle C = 50°$.

39. Найдите углы B и C треугольника ABC, если: а) $AB = 20$ см, $BC = 40$ см, $\angle A = 30°$; б) $AB = 30$ см, $BC = 40$ см, $\angle A = 45°$.

40. Диагональ d параллелограмма разбивает угол параллелограмма на два угла α и β. Выразите стороны параллелограмма через d, α и β.

41. В треугольнике ABC $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Выразите через a, β и γ биссектрису AD, точка D принадлежит стороне BC.

42*. Найдите зависимость между сторонами треугольника ABC, если его медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1 пересекаются в одной точке.

43. Через точку O хорды AB окружности проведена прямая, пересекающая в точках C и D касательные к окружности, проходящие через точки A и B соответственно. Докажите, что $AC \cdot OD = BD \cdot OC$.

44*. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята произвольная точка D. Докажите, что

$$CD^2 = AC^2 - AD \cdot DB.$$

45*. Докажите, что если около треугольника описана окружность радиуса R и в него вписана окружность радиуса r, а d — расстояние между центрами этих окружностей, то $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

46. Докажите, что если CC_1 — биссектриса угла C треугольника ABC, то $CC_1^2 = CA \cdot CB - AC_1 \cdot BC_1$.

47*. Докажите, что биссектриса l_A угла A треугольника ABC выражается через его стороны a, b, c и полупериметр p следующей формулой: $l_A = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

48*. Докажите, что для треугольника ABC имеют место следующие соотношения между его элементами:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

49. Докажите истинность следующих соотношений для треугольника: $a\cos B + b\cos A = c$, $b\cos C + c\cos B = a$, $c\cos A + a\cos C = b$. Выведите из этих соотношений теорему косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

50. Докажите, что если один из углов треугольника тупой, то сторона, лежащая против этого угла, больше любой другой его стороны.

51. Что больше — основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если один из его углов тупой?

52. В равнобедренном треугольнике один из углов тупой, одна сторона равна 15 см, а другая — 10 см. Чему равно основание этого треугольника?

53. Докажите, что расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.

54*. В трапеции $ABCD$ $AB \parallel CD$, угол A больше угла B. Докажите, что если $AB > CD$, то $BC > AD$.

55*. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) пересекаются в точке O. Докажите, что если $AC > BD$, то $AO > BO$ и $CO > DO$.

56. Докажите, что боковая сторона трапеции меньше хотя бы одной из ее диагоналей.

57. Верно ли, что каждая из двух диагоналей трапеции больше хотя бы одной из ее боковых сторон?

58. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CM. Угол ACM больше $45°$. Какой катет больше: AC или BC?

59*. Найдите ошибку в приводимом ниже доказательстве следующего утверждения: «В любом тупоугольном треугольнике сторона, противолежащая тупому углу, больше суммы двух других его сторон».

Доказательство. Пусть в тупоугольном треугольнике ABC $\angle A > \angle B + \angle C$. Тогда, по теореме синусов, синусы углов треугольника ABC пропорциональны противолежащим им сторонам: $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$. Но по условию $\angle A > \angle B + \angle C$, поэтому и $a > b + c$.

Задачи к § 13

60. Докажите, что большее основание трапеции не больше суммы длин остальных ее сторон.

61. Докажите, что большее основание трапеции меньше суммы длин остальных ее сторон.

62. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья, длины которых пропорциональны числам 5, 6, 8, 10, 30?

63. Существует ли четырехугольник со сторонами, равными 13 см, 24 см, 42 см, 79 см?

64. Расстояния от точки A до точек B и C равны 3 см и 14 см, а от точки D — 5 см и 6 см соответственно. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой.

65. На сторонах треугольника ABC взяты точки P, Q и R (по одной на каждой стороне). Докажите, что периметр треугольника PQR меньше периметра треугольника ABC.

66. Докажите, что если вершины ломаной не лежат на одной прямой, то длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы.

67. Прямая a пересекает сторону AB четырехугольника $ABCD$ и не проходит ни через одну из его вершин. Докажите, что эта прямая пересекает хотя бы одну из остальных сторон четырехугольника.

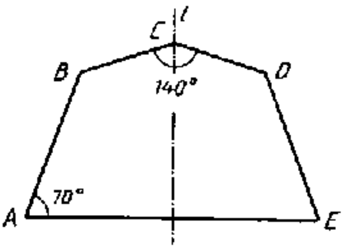


Рис. 12

68. Может ли прямая, не проходящая через вершины замкнутой четырехзвенной ломаной, пересекать три и только три ее звена?

69. Докажите, что если прямая a не проходит через вершины замкнутой ломаной и пересекает одно из ее звеньев, то она пересекает по крайней мере еще одно звено этой ломаной.

70. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины: а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника; г) n-угольника?

71. На сколько треугольников разбивается выпуклый пятиугольник диагоналями, проведенными из одной его вершины?

72. На сколько треугольников разбивается выпуклый n-угольник диагоналями, проведенными из одной его вершины?

73. Многоугольник $ABCDE$ (рис. 12) симметричен относительно прямой l, проходящей через вершину C, $\angle A = 70°$, $\angle C = 140°$. Найдите угол B.

74. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма всех его внутренних углов с одним из внешних равна 2250°?

75. Вычислите число сторон выпуклого многоугольника, у которого равны все его внутренние углы, если сумма его внешних углов с одним из внутренних равна 468°.

76. Какое наибольшее число острых углов может быть у выпуклого многоугольника?

77. В выпуклом четырехугольнике биссектрисы двух углов, прилежащих к одной стороне, образуют угол, равный полусумме двух других углов. Докажите.

78*. Около окружности описан многоугольник, все стороны которого равны. Будет ли многоугольник правильным?

79*. Около окружности описан многоугольник, все углы которого равны. Будет ли многоугольник правильным?

80*. Вычислите диагонали правильного пятиугольника со стороной a.

81. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника при их взаимном пересечении образуют правильный пятиугольник.

82. Через середину B радиуса OA некоторой окружности проведен к нему перпендикуляр, пересекающий окружность в точке K. Отрезок BK может быть приближенно припят равным стороне правильного семиугольника, вписанного в эту окружность. Найдите допускаемую при этом погрешность.

83. AB — сторона вписанного в круг квадрата, $AB = BK$, O — центр круга. Докажите, что отрезок KM равен удвоенной стороне вписанного в этот круг правильного десятиугольника (рис. 13).

84. Вычислите отношение длины дуги, угловая величина которой равна α, к хорде, стягивающей эту дугу, если: а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 90°$; в) $\alpha = 120°$; г) $\alpha = 240°$; д) $\alpha = 300°$.

85. В окружности проведены два радиуса. Найдите образовавшиеся при этом центральные углы, если: а) один из углов в 3 раза больше другого; б) их градусные меры пропорциональны числам 5 и 13; в) один из них на 300° меньше другого; г) разность их равна 90°.

86. Радиусы двух окружностей равны 5 см и 9 см. Чему равны их дуги, соответствующие центральному углу в 60°?

87. Радиус окружности равен 10 см. Найдите длину дуги, соответствующей центральному углу в 57°, считая $\pi \approx 3,14$.

88. По данной длине дуги l найдите ее хорду, если дуга соответствует центральному углу: а) 135°; б) 240°.

89. Длина окружности радиуса R может быть приближенно заменена длиной отрезка, равного сумме удвоенного диаметра окружности и 0,2 стороны квадрата, вписанного в эту окружность. Найдите погрешность и относительную погрешность такой замены.

90. В прямой угол вписана окружность радиуса 5 см. Вычислите периметр фигуры, заключенной между сторонами этого угла и меньшей дугой окружности, ограниченной точками касания окружности сторон угла.

Задачи к § 14

91. Вычислите площади квадратов, данных на рисунке 14, предварительно измерив их стороны.

92. Вычислите площадь квадрата, если его сторона равна: а) 2,5 см; б) 0,21 м.

93. Вычислите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 256 см^2; б) 76,8 м^2; в) 14,6 мм^2.

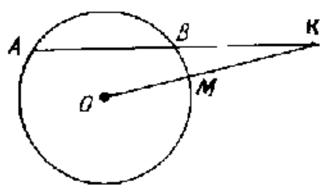


Рис. 13

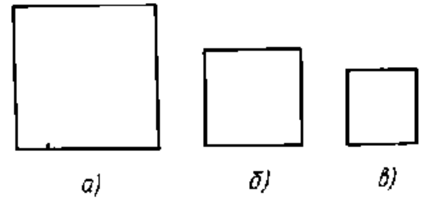


Рис. 14

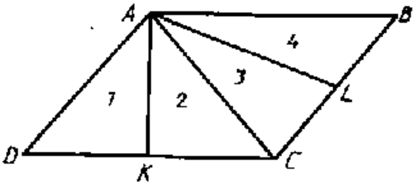


Рис. 15

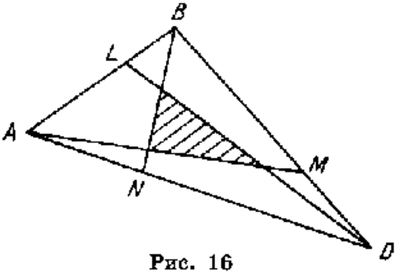


Рис. 16

94. Вычислите периметр квадрата, площадь которого равна 2,5 м^2.

95. а) Площадь параллелограмма равна 24 см^2. Вычислите расстояние между его сторонами, равными 6 см.

б) В параллелограмме, площадь которого равна 41 см^2, стороны равны 5 см и 10 см. Вычислите высоты параллелограмма.

96. Две полосы шириной 4 см и 1 см, пересекаясь, образуют параллелограмм, площадь которого равна 6 см^2. Вычислите стороны этого параллелограмма.

97. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 7 см; б) 1,2 м и 35 дм.

98. Площадь треугольника 48 см^2. Вычислите высоту треугольника, проведенную к стороне, равной 32 см.

99. В треугольнике ABC $AB=3AC$. Чему равно отношение высот, проведенных из вершин B и C?

100. Катеты прямоугольного треугольника 6 см и 8 см, гипотенуза 10 см. Вычислите высоту, проведенную к гипотенузе.

101. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB=12$ см, $AC=16$ см. Вершина D удалена от диагонали AC на 4 см. Вычислите расстояние от точки D до прямой AB.

102. В параллелограмме $ABCD$ вершина A соединена отрезками с серединами сторон BC и CD и вершиной C (рис. 15). Докажите, что треугольники 1, 2, 3, 4 равновелики.

103. Постройте равнобедренный треугольник, равновеликий данному треугольнику, так, чтобы основание построенного треугольника было равно одной из сторон данного треугольника.

104. Вычислите площадь треугольника ABC, если: а) $AB=2$ см, $BC=4$ см, $\angle B=30°$; б) $AB=2$ см, $BC=4$ см, $\angle B=150°$.

105. Вычислите площадь параллелограмма, если его стороны равны 4 см и 6 см, а угол между ними — 30°.

106. Вычислите площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а один из углов — 150°.

107. Вычислите площадь параллелограмма, если его диагонали 6 см и 8 см, а угол между ними равен 45°.

108. Вычислите площадь прямоугольника, диагональ которого 4 см, а угол между диагоналями 30°.

109. Даны два треугольника. α — угол одного из треугольников, β — угол другого треугольника, $\alpha+\beta=180°$. Докажите, что площади этих треугольников относятся как произведения сторон, прилежащих к этим углам.

110. В треугольнике ABC $AC=5$ см, $BC=8$ см, $\angle C=60°$. Вычислите длину биссектрисы CC_1 угла C.

111. Середины оснований трапеции соединены отрезком. Докажите, что полученные две трапеции равновелики.

112. Вычислите площадь трапеции $CDEF$, если $CD \parallel EF$, $\angle F=45°$, $FE=2$ см, $CD=5$ см, $CF=5$ см.

113. Вычислите площадь трапеции с основанием 1 см, боковой стороной 3 см, составляющей с бо́льшим основанием угол 30°, если другой угол при бо́льшем основании равен 45°.

114. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне BC, $AC=4a$, $AD=3a$. Выразите площадь трапеции через a.

115*. Каждая сторона треугольника разделена на три равных отрезка, и точки деления соединены с вершинами (рис. 16). Найдите отношение площадей данного треугольника и заштрихованного.

116*. Через точку M, принадлежащую треугольнику ABC, проведены прямые, параллельные его сторонам. Каждые две из этих прямых и сторона данного треугольника определяют новый треугольник. Докажите, что если эти треугольники имеют площади S_1, S_2, S_3, а площадь данного треугольника равна S, то $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$.

117. Вычислите площадь круга: а) описанного около равностороннего треугольника со стороной 10 см; б) описанного около правильного шестиугольника со стороной 10 см; в) описанного около правильного восьмиугольника со стороной 10 см.

118. Вычислите площадь круга: а) вписанного в правильный шестиугольник со стороной 10 см; б) вписанного в правильный восьмиугольник со стороной 10 см.

119. Площадь кольца, образованного двумя концентрическими окружностями, равна площади круга, диаметр которого равен хорде большей окружности, касающейся меньшей окружности. Докажите.

120. В прямой угол вписана окружность радиуса 5 см. Вычислите площадь фигуры, заключенной между сторонами этого угла и меньшей дугой окружности, ограниченной точками касания окружности сторон угла.

121. Диаметр AB окружности разделен на 4 равных отрезка, на которых построены полуокружности, как показа-

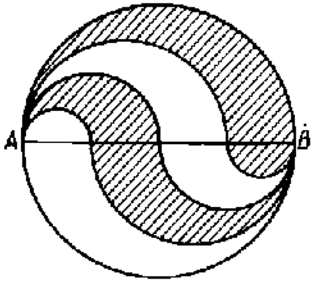


Рис. 17

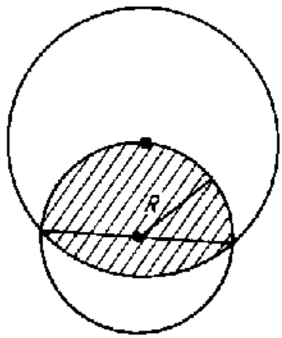


Рис. 18

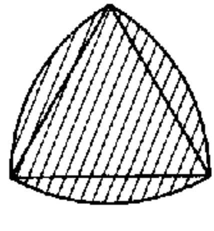


Рис. 19

но на рисунке 17. Вычислите площадь каждой из заштрихованных фигур, если $AB=d$.

122. Окружность радиуса R проходит через центр другой окружности. Точки пересечения этих окружностей лежат на диаметре первой окружности. Выразите через R площадь заштрихованной части (рис. 18).

123. Из каждой вершины равностороннего треугольника радиусом, равным его стороне, проведена дуга, концами которой служат две другие вершины треугольника. Вычислите площадь заштрихованной фигуры (рис. 19).

Задачи к § 15

124. Точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Сколько различных плоскостей определяют прямые AB, AC и AD?

125. Могут ли две плоскости иметь только две общие точки?

126. Какие из следующих пяти утверждений правильны:

1) через две пересекающиеся прямые можно провести только одну плоскость;

2) через любые три точки можно провести только одну плоскость;

3) если точки данной прямой принадлежат двум различным плоскостям, то эти плоскости не имеют других общих точек, отличных от точек этой прямой;

4) если две различные плоскости имеют общие точки B и C, то они пересекаются по прямой BC;

5) через прямую a и точку A можно провести только одну плоскость?

127. Сколько различных плоскостей определяют попарно параллельные прямые a, b и c?

128. Докажите, что если диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются, то все его вершины лежат в одной плоскости.

129. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD, AC и BD, AD и BC скрещивающиеся.

130. Докажите, что если прямые PQ и RS пересекаются, то прямые PR и QS либо параллельны, либо тоже пересекаются.

131. Вершины ломаной не принадлежат данной плоскости. Сколько у этой ломаной может быть общих точек с плоскостью, если концы ломаной лежат по разные стороны от плоскости и она имеет: а) два звена; б) три звена?

132. Решите предыдущую задачу для случая, когда концы ломаной лежат по одну сторону от данной плоскости.

133. Плоскости, проходящие через основания трапеции, пересекаются по прямой d. Параллельна ли эта прямая средней линии данной трапеции?

134. Даны скрещивающиеся прямые a и b. Как провести через них две параллельные плоскости?

135. Докажите, что если прямая c перпендикулярна плоскостям α и β, то плоскости α и β параллельны.

136. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AC и наклонная AB, причем AC меньше AB на 16 дм. Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $BC=24$ дм.

137. Сторона ромба 12 см, меньшая его диагональ 16 см. В вершине острого угла данного ромба восставлен перпендикуляр к его плоскости, длина которого равна 16 см. Найдите расстояние от второго конца этого перпендикуляра до остальных вершин ромба.

138. Сколько граней параллелепипеда, не являющегося прямоугольным, могут быть прямоугольниками?

139. Может ли ортогональная проекция куба на плоскость быть правильным шестиугольником?

140. Можно ли одной плоскостью разбить тетраэдр на: а) два тетраэдра; б) два многогранника, не являющиеся тетраэдрами; в) один тетраэдр и многогранник, не являющийся тетраэдром?

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ПО КУРСУ ГЕОМЕТРИИ VII—IX КЛАССОВ

Треугольник

1. Луч света отражается от плоского зеркала AB таким образом, что угол падения MNA равен углу отражения BNP (рис. 20). Докажите, что если имеются два взаимно перпендикулярных зеркала, то любой луч, направленный внутрь образованного этими зеркалами прямого угла (не проходящий через вершину угла), отразившись от каждого зеркала, изменит свое направление на противоположное.

2. α и β — два угла треугольника. Найдите углы между их биссектрисами.

3. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными?

4. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 30°, а гипотенуза — 32 см. Высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка. Найдите длины этих отрезков.

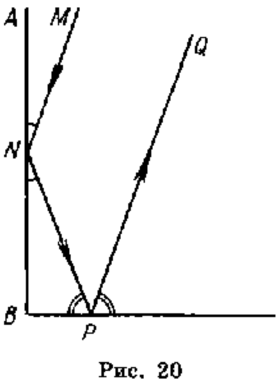


Рис. 20

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника вдвое больше одного из его катетов. Каковы градусные меры острых углов этого треугольника?

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника в 4 раза больше опущенной на нее высоты. Найдите острые углы этого треугольника.

7. На чертеже от треугольника сохранились три точки, являющиеся серединами его сторон. Как восстановить треугольник?

8. Запишите стороны треугольника ABC в порядке убывания их длин, если: а) $\angle A = 10°$, $\angle C = 78°$; б) $\angle C = 178°$, $\angle A = 1°$.

9. Запишите стороны треугольника ABC в порядке возрастания их длин, если $\angle B = 67°$, $\angle C = 78°$.

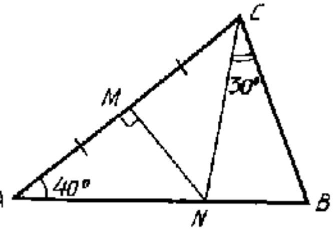


Рис. 21

10. Дан треугольник ABC (рис. 21). Через середину M стороны AC проведен к ней перпендикуляр MN (N принадлежит AB), $\angle CAN = 40°$,

$\angle NCB = 30°$. а) Найдите периметр треугольника BCN, если $AB = a$, $BC = c$. б) Определите вид треугольника ABC.

Четырехугольник

11. Параллелограмм разбивается диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника; бо́льшая сторона параллелограмма равна a. Выразите через a высоту параллелограмма, проведенную к этой стороне.

12. Вычислите углы параллелограмма, если угол между его высотами, проведенными из одной вершины, равен: а) 25°; б) 125°.

13. Постройте параллелограмм по двум сторонам 3 см и 5 см и высоте, равной 2 см. (Два решения.)

14. Постройте параллелограмм по сторонам 3 см, 5 см и высоте 4 см.

15*. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике отрезок, соединяющий середины противолежащих сторон, равен полусумме двух других сторон, то последние стороны параллельны.

16. Докажите, что в любом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины его противоположных сторон, делятся точкой их пересечения пополам.

17. Приведите пример, опровергающий высказывания: а) если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник — ромб; б) если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и равны, то такой четырехугольник — ромб.

18. Какое условие должно быть добавлено к условию а) задачи 17, чтобы четырехугольник был ромбом?

19. Какое условие должно быть добавлено к условию б) задачи 17, чтобы четырехугольник был ромбом?

20. 1) Могут ли углы трапеции, взятые последовательно, относиться как числа: а) 3, 4, 2, 4; б) 8, 7, 13, 12?

2) Углы при одном основании трапеции равны 68° и 74°. Вычислите остальные углы трапеции.

21. В равнобокой трапеции один из углов равен 60°, боковая сторона — 24 см, а сумма оснований — 44 см. Вычислите основания трапеции.

22. Вычислите периметр равнобокой трапеции, если известно, что один из ее углов равен 60°, а основания — 15 см и 49 см.

23. Пусть прямая a касается в точке M окружности с центром O и радиусом r, AB — диаметр, AD и BC — отрезки перпендикуляров, проведенных к касательной через концы диаметра. Тогда OM — средняя линия трапеции $ABCD$. Докажите.

24. Середина каждой стороны параллелограмма соединена с вершинами, принадлежащими противолежащей стороне. Докажите, что площадь образовавшегося восьмиугольника составляет $\frac{1}{6}$ площади параллелограмма.

25. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ и около него же описан треугольник $A_2B_2C_2$, причем соответствующие стороны построенных треугольников параллельны. Докажите, что $S^2_{ABC}=S_{A_1B_1C_1}\cdot S_{A_2B_2C_2}$.

26. Докажите, что если длины диагоналей выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин средних линий четырехугольника, т. е. отрезков, соединяющих середины его противолежащих сторон.

27. Длины диагоналей четырехугольника равны a, а сумма длин его средних линий равна b. Вычислите площадь четырехугольника.

28*. В квадрат, длина стороны которого равна a, вписан прямоугольник так, что каждой стороне квадрата принадлежит вершина прямоугольника. Вычислите длину диагонали прямоугольника, если он отличен от квадрата и его площадь равна S.

Декартовы координаты на плоскости

29. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A (3, −1) параллельно прямой $y=2x-5$.

30*. Запишите условие того, что точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ принадлежат одной прямой.

31. Даны три точки $A(2, 1)$, $B(3, -2)$, $C(0, k)$. При каком значении k данные точки лежат на одной прямой?

32*. Докажите, что сумма квадратов расстояний от всех вершин квадрата до прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.

33*. В квадрат вписана окружность радиуса R. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до сторон квадрата постоянна и равна $6R^2$.

34*. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M. Докажите, что величина $MA^2-MB^2+MC^2-MD^2$ не зависит от положения точки M.

35*. Дан прямоугольник. Найдите геометрическое место всех точек плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до конца одной диагонали прямоугольника равна сумме квадратов расстояний до концов другой его диагонали.

36. На окружности с центром O даны точки A и B. Касательные к окружности в этих точках пересекаются в точке C. Выразите вектор $\overline{OC}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$, если: а) $\angle AOB=60°$; б) $\angle AOB=90°$; в) $\angle AOB=120°$.

37. Дана окружность с центром O. A и B — точки этой окружности. Биссектриса угла AOB пересекает окружность в точке C. Выразите вектор $\overline{OC}$ через векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 120°$.

38. Дан треугольник ABC: $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 4)$. Точки M, N, P — середины сторон BC, CA и AB. Вычислите координаты векторов $\overline{MN}$, $\overline{NP}$, $\overline{PM}$.

39. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(1, 1)$. Вычислите координаты вершины D параллелограммов: а) $ABCD$; б) $ACBD$; в) $CABD$.

40. Дан треугольник ABC: $A(0, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, -2)$, AA_1, BB_1, CC_1 — его медианы. Вычислите координаты векторов $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ и $\overline{CC_1}$.

41. Докажите, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположно направлены, если $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(2, -1)$, $D(0, -4)$.

42. При каком значении m прямые $2x + my - 1 = 0$, $mx + 8y + 2 = 0$ параллельны?

43. Даны два перпендикулярных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, причем $|\overline{a}| = |\overline{b}|$. Координаты вектора $\overline{a}$ равны (x_0, y_0). Чему равны координаты вектора $\overline{b}$?

44. В треугольнике ABC координаты вершин: $A(1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(-1, 4)$. Найдите его медианы.

45. Точки M и N — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$. Прямые DM и BN пересекаются в точке P. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь четырехугольника $AMPN$?

Преобразования фигур

46. Через точку, лежащую внутри круга, проведите хорду так, чтобы она делилась данной точкой пополам.

47. Постройте центрально-симметричный шестиугольник.

48. Дан параллелограмм, вершины которого не поместились на чертеже. Постройте центр симметрии этого параллелограмма.

49. Сколько осей симметрии может иметь четырехугольник?

50*. Даны угол, вершина D которого не поместилась на чертеже, и произвольная точка M (M в пределах чертежа). Проведите через точку M прямую так, чтобы она проходила через вершину D.

51*. Даны прямая p и точки A и B по разные стороны от нее. На прямой p найдите такую точку M, чтобы разность расстояний ее от точек A и B была наибольшей.

52*. Могут ли две симметрии относительно прямых иметь общие пары соответствующих точек?

53*. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

54. Можно ли построить такой выпуклый пятиугольник, диагональ которого лежит на его оси симметрии? Ответ обоснуйте.

55. Докажите, что в выпуклом многоугольнике с нечетным числом вершин и имеющем оси симметрии ни одна из диагоналей не может лежать на оси симметрии.

56*. Постройте четырехугольник по трем сторонам a, b, c и двум углам, прилежащим к четвертой стороне.

57. Докажите, что если выпуклый пятиугольник имеет две оси симметрии, то он имеет пять осей симметрии.

58. Шестиугольник имеет три оси симметрии. Следует ли из этого, что шестиугольник правильный?

59*. В данную окружность впишите треугольник, стороны которого параллельны трем данным прямым.

60. Через данную внутри круга точку проведите хорду данной длины. Всегда ли эта задача имеет решение?

61. Дан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что если $\angle A = \angle B$ и $\angle C = \angle D$, то четырехугольник имеет ось симметрии.

62*. В данную окружность впишите пятиугольник, стороны которого параллельны пяти данным прямым.

63*. На бильярдном столе прямоугольной формы лежит шар. В каком направлении необходимо по шару произвести удар, чтобы, отразившись от всех бортов, шар прошел через свое первоначальное положение?

64. Как найти площадь трапеции, все стороны которой известны?

65*. Постройте такой равносторонний треугольник, чтобы одна его вершина совпала с данной точкой O, а две другие принадлежали двум данным окружностям.

Преобразование подобия

66*. Даны две гомотетии с коэффициентами k и $\frac{1}{k}$ и различными центрами. Какое преобразование представляет собой последовательное выполнение этих гомотетий?

67*. Даны две гомотетии с различными центрами. Какие прямые переходят в себя при последовательном выполнении этих гомотетий?

68. Дана трапеция $ABCD$, основания которой AB и CD, M — точка пересечения ее диагоналей AC и BD. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABM и CDM, касаются в точке M.

69. В треугольнике ABC проведена средняя линия MN (M — середина AC, N — середина BC). Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и MNC, касаются в точке C. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

70. Средние линии данного треугольника определяют другой треугольник, около которого описана окружность. Докажите, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса окружности, описанной около данного треугольника.

71*. Даны три окружности, которые попарно касаются внешним образом. Постройте с помощью одной линейки центры этих окружностей (точки касания окружностей заданы).

72. В данный сегмент впишите квадрат так, чтобы две вершины принадлежали дуге, а две другие — основанию сегмента.

73. В данный сектор впишите квадрат так, чтобы две вершины принадлежали дуге, а две другие — радиусам.

74. В данный сектор, меньший полукруга, впишите квадрат, чтобы одна вершина принадлежала дуге, вторая — радиусу, две другие — второму радиусу.

Пропорциональные отрезки

75. Две пересекающиеся прямые a и b пересечены тремя параллельными прямыми соответственно в точках A_1 и B_1, A_2 и B_2, A_3 и B_3. Докажите, что середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 принадлежат одной прямой.

76. Докажите, что если середины M и N двух противоположных сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ и точка S пересечения прямых BC и AD принадлежат одной прямой, то четырехугольник — трапеция.

77. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны a и b. Прямая l, параллельная AB, пересекает стороны BC и DA соответственно в точках M и N. а) Вычислите длину d отрезка NM, если $AN:ND=k$. б) Вычислите отношение $AN:ND$, если $MN=d$.

78. В параллелограмме $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает отрезки AD, AC, BC и BD соответственно в точках P, Q, R и S. Докажите, что $PQ=RS$.

79. Докажите, что если прямая, проходящая через середины противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

Подобие фигур

80. Можно ли так пересечь треугольник прямой, не параллельной его сторонам, чтобы отсеченный треугольник был подобен данному?

81. Может ли медиана треугольника рассечь его на два подобных друг другу треугольника, которые не являются равными?

82. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены неравные высоты AM и BN. Докажите, что треугольники AMC и ABN подобны.

83. Докажите, что трапеции подобны, если соответствующие стороны этих трапеций пропорциональны. Верно ли такое же утверждение для параллелограмма?

84. Диагональ трапеции делит ее на два подобных треугольника. Найдите зависимость между длиной d этой диагонали и длинами a и b оснований трапеции.

85. Постройте прямоугольник по стороне и отношению другой стороны к диагонали.

86. Касательные в точках A и B к окружности пересекаются в точке S. Докажите, что расстояние от любой точки окружности до прямой AB есть среднее пропорциональное ее расстояний до прямых AS и BS.

87. Две окружности радиусов R_1 и R_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через A, пересекает окружности вторично в точках M и N соответственно. Докажите, что $BM : BN = R_1 : R_2$.

88. К окружности проведены две параллельные касательные: a и b. Третья касательная пересекает a и b соответственно в точках A и B и касается окружности в точке C. Вычислите расстояние между a и b, если $AC = m$, $BC = n$.

89. Даны два подобных прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Докажите, что $aa_1 + bb_1 = cc_1$, где a, b, c — соответственно катеты и гипотенуза первого треугольника, а a_1, b_1, c_1 — второго.

90. Около треугольника ABC описана окружность, к которой в точке A проведена касательная. Через вершину B проведена прямая, параллельная касательной и пересекающая прямую AC в точке D. Докажите, что треугольники ABD и ABC подобны и $AB^2 = AD \cdot AC$.

Вписанные и описанные многоугольники

91. Окружность разделена тремя точками на дуги, длины которых относятся как числа 2, 3 и 4, и точки деления соединены отрезками. Найдите углы полученного треугольника.

92. Найдите углы вписанного в окружность равнобедренного треугольника, боковая сторона которого стягивает дугу в 24°51′.

93*. Постройте треугольник по медиане, биссектрисе и высоте, исходящим из одной вершины.

94. Вычислите радиусы окружностей, описанной около прямоугольного треугольника и вписанной в него, если его катеты равны: а) 20 см и 21 см; б) 40 см и 30 см.

95. В прямоугольнике, вписанном в окружность, стороны равны 15 см и 20 см. Вычислите радиус окружности.

96. Вычислите углы треугольника, в котором высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины его угла, делят этот угол на четыре равных угла.

97. В прямоугольном треугольнике медиана и биссектриса, проведенные из вершины прямого угла, образуют угол в $10°$. Вычислите углы данного треугольника.

98. Из вершины прямого угла треугольника проведены лучи через центры вписанной и описанной окружностей. Угол между этими лучами равен $7°$. Вычислите острые углы треугольника.

99. Три угла вписанного четырехугольника относятся как числа 2, 3 и 4. Вычислите его углы.

100. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке K (рис. 22). Докажите, что точки A, B_1, K и C_1 лежат на одной окружности.

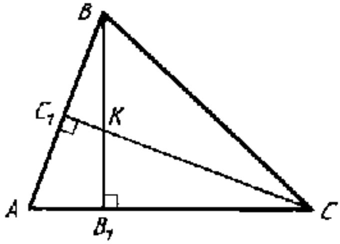


Рис. 22

Геометрические неравенства

101. Докажите, что из всех медиан равнобедренного треугольника с основанием a и углом при вершине α медиана, проведенная к стороне a: а) наибольшая при $\alpha < 60°$; б) наименьшая при $\alpha > 60°$.

102*. Докажите, что если $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$, то $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$.

103*. Докажите, что если m_a и m_b — медианы прямоугольного треугольника, проведенные к его катетам, то $\frac{1}{2} < \frac{m_a}{m_b} < 2$.

104*. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место неравенство $l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 \leqslant p^2$, где l_A — биссектриса угла A треугольника, p — полупериметр.

105*. Докажите, что для всякого треугольника имеют место неравенства $p^2 \geqslant 27r^2$, $S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, где p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника.

106*. Докажите, что для всякого треугольника ABC $h_A \leqslant \sqrt{p(p-a)}$, где h_A — высота, проведенная из вершины A, p — полупериметр.

107*. Докажите, что биссектриса l_A угла A треугольника ABC связана с его сторонами неравенством $l_A \leqslant \sqrt{p(p-a)}$.

108*. Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место неравенство $S \leqslant \frac{b^2+c^2}{4}$, где S — площадь, b и c — стороны треугольника.

109*. Докажите, что для прямоугольного треугольника имеет место неравенство $R + r \geqslant \sqrt{2S}$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей, а S — площадь треугольника.

Разные задачи

110. Даны два треугольника ABC и AB_1C_1, имеющие общую медиану AA_1. Докажите, что $\overline{CB_1}=\overline{C_1B}$.

111. Дан треугольник ABC. G — точка пересечения его медиан. Докажите, что для любой точки M имеет место соотношение

$$\overline{MG}=\frac{1}{3}(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}).$$

112. M и M_1 — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\overline{MM_1}=\frac{1}{3}(\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1})$.

113. Даны окружность с центром O, ее диаметр CD и параллельная диаметру CD хорда AB. На диаметре или на его продолжении взята произвольная точка M. Докажите, что сумма AM^2+BM^2 не зависит от положения хорды при заданном положении точки M.

114. Докажите, что косинусы углов треугольника связаны соотношением $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$.

115. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$ и $AC=A_1C_1$. Докажите, что если угол A больше угла A_1, то $BC>B_1C_1$.

116. Докажите теорему, обратную утверждению предыдущей задачи.

117*. Докажите, что если у треугольника две биссектрисы равны, то он равнобедренный.

118. Докажите, что пятиугольник правильный, если равны все его стороны и три последовательных угла.

119. Две противоположные стороны правильного восьмиугольника и перпендикулярные к ним диагонали образуют прямоугольник. Выразите площадь прямоугольника через сторону a восьмиугольника.

120. Из данной точки на стороне угла, как из центра, опишите окружность, которая от другой стороны угла отсечет хорду данной длины.

121. Хорда, равная 8 см, отсекает от окружности дугу в 90°. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

122. Дана окружность. Через середину ее радиуса проведена перпендикулярная ему хорда. Докажите, что эта хорда видна из центра окружности под углом 120°.

123. Окружность с центром в точке $O(0, 0)$ проходит через точку $(3, -4)$. Вычислите длину этой окружности.

124*. Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, и четырехугольника, описанного около нее (вершины вписанного четырехугольника являются точками касания с окружностью сторон описанного четырехугольника), пересекаются в одной точке.

125*. Докажите, что у выпуклого четырехугольника диагонали пересекаются.

126. Докажите теорему, обратную утверждению предыдущей задачи.

127. В четырехугольнике диагонали равны 8 см и 12 см и в точке их пересечения делятся пополам. Вычислите площадь этого четырехугольника, если угол между диагоналями равен 30°.

128. Один из углов прямоугольного треугольника 15°. Выразите площадь этого треугольника через его гипотенузу c.

129. Окружность с центром в точке $O(0,\ 0)$ проходит через точку с координатами $(12,\ -5)$. Вычислите площадь вписанного в нее: а) правильного треугольника; б) квадрата; в) правильного пятиугольника.

130. Окружность с центром в точке $O(0,\ 0)$ проходит через точку с координатами $(3,\ -4)$. Вычислите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

131. Докажите, что если средняя линия четырехугольника делит его на две равновеликие части, то четырехугольник есть трапеция.

132. Средние линии четырехугольника разбивают его на четыре четырехугольника. Докажите, что сумма площадей двух неприлежащих четырехугольников составляет половину площади четырехугольника.

133. Середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника последовательно соединены. Докажите, что площадь полученного четырехугольника равна половине площади данного четырехугольника.

134. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равны 3 см и 5 см, одна из его диагоналей — 5 см. Вычислите площадь этого четырехугольника.

135. Через каждую вершину произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям, не проходящим через эту вершину. Покажите, что площадь полученного таким образом параллелограмма в два раза больше площади данного четырехугольника.

136. Несколько выпуклых четырехугольников имеют общие середины сторон (рис. 23). Докажите, что эти четырехугольники равновелики.

137. Вычислите площади следующих многоугольников, зная координаты их вершин: а) треугольника KLM, если $K(0,\ 0)$, $L(4,\ 4)$, $M(6,\ 0)$; б) квадрата $ABCD$, если $A(0,\ 0)$, $B(3,\ 4)$; в) квадрата $PQRT$, если $Q(0,\ 0)$, $R(4,\ 3)$; г) четырехугольника $ABCD$, если $A(0,\ 4)$, $B(4,\ 4)$, $C(6,\ 0)$, $D(0,\ 0)$; д) пятиугольника $ABCDE$, если $A(0,\ 5)$, $B(3,\ 6)$, $C(5,\ 5)$, $D(5,\ 2)$, $E(3,\ 0)$. Указание. Сначала постройте каждую из фигур.

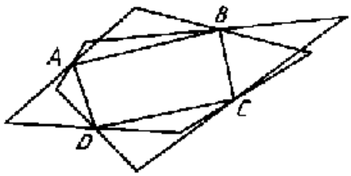


Рис. 23

138. Можно ли сложить паркет из правильных десятиугольников и пятиугольников?

139. Допустим, что земной шар и футбольный мяч обтянуты по экватору обручами. Если разрезать в обоих случаях обручи и прибавить к их длинам по 1 м, а затем концы их сшить и расположить вновь образовавшиеся обручи равномерно от поверхности земного шара и мяча, то образуются зазоры. В каком случае зазор будет больше?

140. Стекольщику поручили вырезать оконное стекло для окна круглой формы. Что и как должен стекольщик измерить, чтобы вырезать такое стекло, располагая рулеткой?

141. Из листа фанеры размером 220×80 см для цветочных ящиков требуется вырезать равнобокие трапеции с основаниями 30 см и 10 см и острым углом 45°, причем сделать разметку требуется наиболее рациональным способом. Сколько таких трапеций можно вырезать?

142. Требуется выстелить пол комнаты размером 6×4 м плитками правильной шестиугольной формы. Определите, сколько таких плиток требуется, если сторона плитки 20 см. На запас добавляется 5% от общего количества плиток.

143. Некоторая площадь покрыта равными правильными шестиугольными плитками. Какую площадь можно покрыть тем же числом равных правильных треугольных плиток, если сторона треугольной плитки равна меньшей диагонали шестиугольной плитки?

144. Вода течет по двум трубам с одинаковой скоростью. Первая труба имеет диаметр $d_1 = 20$ см, а вторая — диаметр $d_2 = 15$ см. Во сколько раз подача воды в первой трубе больше, чем во второй?

145. Токарь должен обточить вал диаметром 142 мм так, чтобы площадь его поперечного сечения уменьшилась в 1,5 раза. На сколько уменьшится диаметр?

146. Найдите предельную нагрузку, которую может выдержать латунная проволока, если диаметр ее поперечного сечения 2,5 мм, а предельная нагрузка для латуни при растяжении составляет 65 кг на 1 мм^2.

147. На прямоугольном заводском дворе размером 150×110 м, загруженном строениями, хотят разбить круглый газон радиусом 5 м. Там стоят 10 складов, размеры которых 20×20 м, 4 цеха размером 40×10 м и круглое бензохранилище радиуса 10 м. Докажите, что можно разбить этот газон вне зависимости от расположения строений.

148. Докажите, что нельзя провести прямую так, чтобы она пересекала все стороны 1001-угольника.

149. Из пяти точек никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать из них четыре точки, которые являются вершинами выпуклого четырехугольника.

150. На плоскости даны шесть точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что среди них есть три точки, которые образуют треугольник с углом, не меньшим $120°$.

151. Внутри выпуклого 100-угольника выбрано 30 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой; 100-угольник разрезан на треугольники так, что совокупность вершин всех этих треугольников состоит из 30 выбранных точек и 100 вершин первоначального многоугольника. Сколько имеется треугольников?

152. На плоскости даны 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Мы последовательно соединим точки непересекающимися отрезками и продолжим этот процесс до тех пор, пока уже больше не останется ни одной пары точек, которые можно было бы соединить отрезком, не пересекающим проведенные ранее.

Докажите, что число проведенных отрезков не зависит от порядка, в котором мы соединяем наши точки.

В каких пределах может изменяться число отрезков в зависимости от расположения 1000 точек на плоскости?

153. Каждая диагональ четырехугольника делит его на треугольники с равной площадью. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

154. На продолжении стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ найдите такую точку O, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ равнялась площади треугольника ABO.

155. На плоскости расположены n точек так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площадью 4.

156. Геолог находится где-то в лесу площадью S. Форма леса ему не известна, однако он знает, что в лесу нет полян. Докажите, что он может выйти из леса, пройдя путь не более $2\sqrt{\pi S}$ (считается, что геолог может двигаться по пути заранес намеченной формы).

157*. Вершина M равнобокой трапеции $MBCD$ лежит на основании AD трапеции $ABCD$, причем $AM=BC=a$, H — высота трапеции. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AC^2-BD^2=AB^2+CD^2$. Решите задачу при следующих данных: а) $a=5$ см, $H=4$ см; б) $a=13$ м, $H=12$ м. Сколько решений имеет задача?

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1 *Вариант 1*

1. В треугольнике ABC через точку K, принадлежащую стороне AB, проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая сторону AC в точке M. а) Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle AKM$. б) Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника AKM равен 15 см, а отношение сторон $AK:AB = 1:3$.

2. Хорда AB, равная 8 см, отсекает от окружности с центром в точке O дугу в $90°$. Через концы хорды проведены диаметры AC и BD. а) Определите вид четырехугольника $ABCD$. б) Найдите длины диагоналей и неизвестных сторон четырехугольника.

К-1 *Вариант 2*

1. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) O — точка пересечения диагоналей. а) Докажите, что $\triangle BOC \sim \triangle DOA$. б) Найдите BC, если $AD = 12$ см, $BO:OD = 1:2$.

2. Из точки A окружности с центром в точке O проведены взаимно перпендикулярные равные хорды AB и AC. а) Определите вид треугольников AOB и ABC. б) Вычислите стороны треугольника ABC, если хорды AB и AC удалены от центра на расстояние 4 см.

К-1 *Вариант 3*

1. В треугольнике ABC через точку M, принадлежащую стороне AC, проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая BC в точке N. а) Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle MNC$. б) Найдите стороны треугольника ABC, если стороны треугольника MNC равны 4 см, 6 см, 7 см и точка M делит сторону AC в отношении $1:1$.

2. Дана окружность радиуса 1 дм. Тремя точками она разделена в отношении $1:2:3$. Точки последовательно соединены хордами. а) Определите вид полученного треугольника. б) Вычислите длины хорд.

К-1 *Вариант 4*

1. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) O — точка пересечения диагоналей. а) Докажите, что $\triangle COB \sim \triangle AOD$. б) Найдите диагональ BD, если $BC=6$ см, $AD=9$ см, $BO=4$ см.

2. В окружности диаметры AC и BD пересекаются под углом $60°$. а) Определите вид треугольника AOB, четырехугольника $ABCD$. б) Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если радиус окружности равен 4 см.

К-2* *Вариант 1*

1. В равнобедренном треугольнике один из углов тупой, одна сторона равна 14 см, а другая — 8 см. а) Чему равно основание этого треугольника? б) Найдите угол при основании.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC делит угол A на углы в $30°$ и $50°$. Меньшая сторона равна 4 см. а) Назовите меньшую сторону параллелограмма. (Ответ обоснуйте.) б) Вычислите длины большей стороны и диагоналей.

К-2 *Вариант 2*

1. В треугольнике ABC $\angle A=40°$, $\angle B=80°$, меньшая сторона равна 6 см. а) Назовите меньшую сторону треугольника. (Ответ обоснуйте.) б) Вычислите среднюю сторону.

2. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) диагональ AC с основанием AD образует угол $25°$, $DC=4$ см, $AD=7$ см. а) Вычислите углы треугольника ACD. б) Найдите диагональ AC.

К-2 *Вариант 3*

1. В треугольнике ABC $AB=5$ см, $BC=7$ см, $AC=8$ см. а) Определите, какой из углов наименьший и какой наибольший. б) Вычислите наибольший угол треугольника ABC.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали, равные 10 см и 14 см, пересекаются под углом $70°$. а) Вычислите периметр параллелограмма. б) Найдите углы параллелограмма.

---

* Во всех вариантах контрольной работы № 2 предлагается проводить округление величин на каждом шаге выполнения вычислений.

К-2 *Вариант 4*

1. В треугольнике ABC $\angle A = 80°$, $\angle B = 70°$. Бо́льшая сторона равна 5 см. а) Назовите наибольшую и наименьшую стороны треугольника. (Ответ обоснуйте.) б) Вычислите наименьшую сторону.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали равны 8 см и 12 см и пересекаются под углом 100°. а) Вычислите периметр параллелограмма. б) Найдите углы параллелограмма.

К-3 *Вариант 1*

1. Около правильного треугольника со стороной 5 см описана окружность. Найдите: а) радиус описанной окружности; б) сторону правильного шестиугольника, вписанного в эту же окружность.

2. Около правильного треугольника ABC описана окружность. Длина дуги AB равна 2π см. Найдите: а) радиус данной окружности; б) длину одной из медиан треугольника ABC.

К-3 *Вариант 2*

1. В правильный четырехугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите: а) радиус окружности; б) сторону правильного треугольника, описанного около данной окружности.

2. Диаметры окружности AC и BD пересекаются под углом 90°. Длина дуги BC равна 4π см. Найдите: а) радиус данной окружности; б) длины хорд с концами в точках A, B, C, D.

К-3 *Вариант 3*

1. В правильный шестиугольник со стороной 10 см вписана окружность. Найдите: а) радиус вписанной окружности; б) сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

2. Около правильного шестиугольника описана окружность. Длина дуги, соответствующая одной из сторон шестиугольника, равна 3π см. Найдите: а) радиус окружности; б) одну из высот правильного треугольника, вписанного в эту же окружность.

К-3 *Вариант 4*

1. Вокруг квадрата со стороной 6 см описана окружность. Найдите: а) радиус описанной окружности; б) сторону правильного треугольника, описанного около данной окружности.

2. Диаметры AC и BD окружности пересекаются под углом 60°. Длина дуги, соответствующая данному углу, равна 4π см. Найдите: а) радиус окружности; б) длины хорд AD и DC.

К-4 *Вариант 1*

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$ см, $AD = 8$ см, $\angle B = 150°$. Найдите: а) площадь параллелограмма; б) высоту, проведенную к большей стороне.

2. Боковая сторона трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), равная $5\sqrt{2}$ см, образует с бо́льшим основанием угол в 45°. Основания равны 12 см и 20 см. а) Вычислите площадь трапеции. б) Докажите, что треугольники ABD и BAC имеют равные площади.

К-4 *Вариант 2*

1. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $AC = 7$ см, $\angle A = 30°$. Найдите: а) площадь треугольника; б) высоту, проведенную к стороне AB.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC, равная 8 см, образует со стороной AD угол в 30°, $AD = 7$ см. а) Найдите площадь параллелограмма. б) Докажите, что треугольники ABO и CBO имеют равные площади, если O — точка пересечения диагоналей.

К-4 *Вариант 3*

1. Площадь квадрата равна 0,64 дм^2. Найдите: а) периметр квадрата; б) площадь круга, вписанного в квадрат.

2. В прямоугольной трапеции один из углов равен 135°, средняя линия равна 18 см, а основания относятся как 1 : 8. Вычислите: а) основания трапеции; б) площадь трапеции.

К-4 *Вариант 4*

1. Площадь прямоугольника равна 72 см^2, а отношение смежных сторон равно 1 : 2. Найдите: а) стороны и диагональ прямоугольника; б) площадь круга, описанного около прямоугольника.

2. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 12$ см, $AC = 16$ см. Вершина D удалена от диагонали AC на 4 см. Найдите: а) площадь параллелограмма; б) расстояние от точки D до прямой AB.

К-5 *Вариант 1*

1. Дан параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O. Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром O переходит данный параллелограмм, если коэффициент гомотетии 0,5.

2. Докажите, что у подобных треугольников высоты, проведенные к соответствующим сторонам, относятся как эти стороны.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC, равным 7 см, боковая сторона его равна 10 см. На боковых сторонах треугольника отложены отрезки AP и CQ, равные основанию данного треугольника. Найдите длину отрезка PQ.

К-5 *Вариант 2*

1. Дана трапеция, боковые стороны которой при их продолжении пересекаются в точке O. Постройте фигуру, в которую при гомотетии с центром O переходит данная трапеция, если коэффициент гомотетии 0,5.

2. Докажите, что у подобных треугольников медианы, проведенные к соответствующим сторонам, относятся как эти стороны.

3. Дан равнобедренный треугольник DEF с основанием EF, равным 16 дм, и боковой стороной 10 дм. На продолжениях боковых сторон за точку D отложены отрезки EA и FB, равные основанию данного треугольника. Найдите длину отрезка AB.

К-5 *Вариант 3*

1. Докажите, что при гомотетии ромб переходит в ромб.

2. В треугольник ABC вписан параллелограмм $AEDF$, имеющий с данным треугольником общий угол (вершины E, D и F параллелограмма лежат на сторонах треугольника). Зная, что $AB = 24$ см, $AC = 18$ см, найдите стороны этого параллелограмма, если его периметр равен 44 см.

3. Дан треугольник PMN со сторонами $PM = 10$ см, $PN = 25$ см, $MN = 28$ см. На продолжениях его сторон за точку P отложены отрезки $MC = 15$ см и $ND = 27$ см. Найдите длину отрезка CD.

К-5 *Вариант 4*

1. Докажите, что при гомотетии прямоугольник переходит в прямоугольник.

2. Дан треугольник PQR со сторонами $PQ = 12$ дм, $PR = 16$ дм и $QR = 24$ дм. Прямая, параллельная стороне QR, отсекает от данного треугольника трапецию, периметр которой равен 50,4 дм. Найдите меньшее основание этой трапеции.

3. Дан треугольник CKL со сторонами $CK = 10$ дм, $CL = 15$ дм, $KL = 26$ дм. На продолжениях его сторон за точку C отложены отрезки $KT = 12$ дм и $LS = 18$ дм. Найдите длину отрезка CT.

К-6 *Вариант 1*

1. Докажите, что треугольники, на которые разбивает данный треугольник его медиана, имеют равные площади.

2. Основания трапеции равны 9 см и 15 см. Найдите площадь трапеции, если углы при большем основании равны 30° и 60°.

3. Сторона равностороннего треугольника равна a и является диаметром круга. Найдите площадь части круга, которая находится внутри данного треугольника.

К-6 *Вариант 2*

1. Докажите, что трапеции, на которые разбивает данную трапецию отрезок, соединяющий середины ее оснований, имеют равные площади.

2. Одна из сторон треугольника равна 6 дм, прилегающие к ней углы — 30° и 45°. Найдите площадь данного треугольника.

3. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен d и является диаметром круга. Найдите площадь части круга, которая находится внутри треугольника.

К-6 *Вариант 3*

1. В параллелограмме $ABCD$ вершина A соединена отрезками с серединами сторон BC и CD. Докажите, что треугольники, отсекаемые при этом от параллелограмма, имеют равные площади.

2. Диагонали трапеции $PQRS$ с основаниями PS и QR пересекаются в точке O. Площади треугольников POS и QOR равны 54 см^2 и 24 см^2. Найдите площадь данной трапеции.

3. Найдите площадь круга, окружность которого описана около треугольника со сторонами 7 см, 15 см и 20 см.

К-6 *Вариант 4*

1. Диагонали трапеции $PQRS$ с основаниями PQ и RS пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники PSO и QRO имеют равные площади.

2. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке M. Площади треугольников ABM и BCM равны 80 дм^2 и 32 дм^2. Найдите площадь данной трапеции.

3. Найдите площадь круга, окружность которого является вписанной в треугольник со сторонами 39 дм, 60 дм и 63 дм.

К-7 *Вариант 1*

1. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 26 см, а его проекция на гипотенузу равна 10 см. Найдите второй катет и гипотенузу данного прямоугольного треугольника.

2. В треугольнике даны два угла и разность двух его сторон. Найдите стороны данного треугольника, если $\alpha = 58°$, $\beta = 73°$ и $b - c = 1{,}2$ см.

3. Сторона ромба равна 12 см, один из углов — 120°. Найдите площадь круга, касающегося всех сторон данного ромба.

К-7 *Вариант 2*

1. В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны 121 дм и 3600 дм. Чему равны данные катеты?

2. В треугольнике даны два угла и сумма двух его сторон. Найдите стороны данного треугольника, если $\alpha = 81°$, $\beta = 68°$ и $a + c = 6{,}3$ дм.

3. Диагонали ромба равны 28 дм и $28\sqrt{3}$ дм. Найдите площадь круга, касающегося всех сторон данного ромба.

К-7 *Вариант 3*

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 120 см и 160 см. Через середину гипотенузы проведен перпендикуляр к ней. На какие части этот перпендикуляр разбивает больший катет данного прямоугольного треугольника?

2. Две стороны треугольника равны 9 см и 19 см. Его медиана, проведенная к третьей стороне, равна 11 см. Найдите углы и третью сторону данного треугольника.

3. Одно из оснований равнобокой трапеции равно 50 см, боковая сторона — 34 см. В данную трапецию вписана окружность, касающаяся всех ее сторон. Найдите длину этой окружности.

К-7 *Вариант 4*

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 дм и 10 дм. Из основания перпендикуляра, проведенного из вершины прямого угла на гипотенузу, опущен перпендикуляр на меньший катет данного прямоугольного треугольника. На какие части основание этого перпендикуляра разбивает данный катет?

2. Две стороны треугольника равны 18 дм и 13 дм. Его медиана, проведенная к первой из данных сторон, равна 8 дм. Найдите углы и третью сторону этого треугольника.

3. Основания равнобокой трапеции равны 14 дм и 40 дм, расстояние между ними — 39 дм. Около данной трапеции описана окружность, проходящая через все ее вершины. Найдите длину этой окружности.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

С-1

Эта работа посвящена свойствам преобразования подобия (п. 100—102 учебника). В первом задании (варианты 1—3) требуется построить точки, в которые переходят данные точки при гомотетии с данным центром и коэффициентом гомотетии. По усмотрению учителя построения могут производиться с помощью циркуля и линейки или линейки с делениями. Вторые задания (во всех вариантах) посвящены отработке понятия подобных треугольников.

Вар. 1. **2.** 2,5 см, 2,3 см, 1,25 см.

Вар. 2. **2.** 2,625 см, 1,875 см, 1,5 см.

Вар. 3. **2.** $\frac{7}{3}$ см, 3,5 см, $\frac{7}{4}$ см.

Вар. 4. **2.** Указание. Построить какой-нибудь прямоугольный треугольник по известному отношению катета к гипотенузе, а затем гомотетичный ему, используя известную сторону прямоугольника.

С-2

При выполнении заданий этой работы используются признаки подобия треугольников по двум углам и по трем сторонам.

Вар. 1. **1.** Подобны.

Вар. 2. **1.** 13,5 см, 18 см, 27 см.

Вар. 3. **1.** 25 см, 30 см, 40 см.

Вар. 4. **1.** $1\frac{7}{8}$ см.

С-3

Для выполнения заданий данной самостоятельной работы следует использовать учебный материал пункта 106 учебника.

Вар. 1. **1.** $AB=25$ см. **2.** $h=6$ см.

Вар. 2. **1.** 60 см, 80 см. **2.** 5 см, 12 см, 13 см.

Вар. 3. **1.** 7,5 дм, 12,5 дм. **2.** 8 дм, 15 дм, 17 дм.

Вар. 4. **1.** $8\frac{32}{41}$ дм. **2.** $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

С-4

При решении заданий этой работы используется теорема 11.5 об углах, вписанных в окружность, и ее следствия (п. 107 учебника).

Вар. 1. **1.** $\angle ABC=44°$. **2.** $\angle A=90°$, $\angle B=\angle C=45°$.

Вар. 2. **1.** $\angle ABC=138°$. **2.** $\angle BAD=80°$.

Вар. 3. **1.** $\angle ABC=73°$. **2.** $\angle BAD=60°$.

Вар. 4. **1.** $\angle AOC=162°$. **2.** Указание. Докажите сначала, что центром данной окружности является точка пересечения диагоналей прямоугольника.

С-5

Работа охватывает практически все содержание § 11, относящееся к преобразованию подобия и его свойствам. При этом основное внимание уделяется признакам подобия треугольников (2-е и 3-е задания во всех вариантах). Для решения последних используется признак подобия по двум углам (имеющий наиболее частое применение при решении разнообразных задач) и признак подобия по двум сторонам и углу между ними (который не применялся при выполнении С-2). При выполнении первого задания ссылка на свойства преобразования подобия (п. 101) не обязательна, если учитель не сочтет необходимым обратное.

Вар. 1. 1. Указание. Следует иметь в виду, что точка O может принадлежать лучу AB или нет. Учитель может задать заранее положение этой точки относительно луча. 2. $AB=14$ см. 3. $AC=4$ см.

Вар. 2. 3. $PQ=6$ см.

Вар. 3. 3. 2 см.

Вар. 4. 3. $ED=12$ м. Указание. $\triangle ABC \sim \triangle AED$.

С-6

Вторые задания носят вычислительный характер, а при выполнении первых заданий предполагается использование рассуждений (в заключительной стадии). Чтобы определить вид угла (острый, прямой или тупой), достаточно найти его косинус. Кроме того, с той же целью можно воспользоваться результатами № 3 к § 12 учебника.

Вар. 1. 1. Острый. 2. $\approx 8{,}10$ см.

Вар. 2. 1. Прямоугольный. 2. 0,24 см.

Вар. 3. 1. Тупоугольный. 2. 22 см.

Вар. 4. 1. Остроугольный. 2. 275,16 Н, $\angle POR \approx 35°50'$.

С-7

Эта работа предлагается на закрепление теоремы синусов (первые задания) и ее следствий (вторые задания).

Вар. 1. 1. $AC=4\sqrt{2}$ см. 2. Угол Q — наибольший, угол R — наименьший.

Вар. 2. 1. $CM=10\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. 2. Не может.

Вар. 3. 1. $KD=6\sqrt{\frac{2}{3}}$ см. 2. Не может.

Вар. 4. 1. Указание. Воспользоваться теоремой 4.4, $KL \approx 7{,}035$ см, $KM \approx 5{,}22$ см. 2. Не может.

С-8

Вар. 1. 1. Сторона AC. 2. 90°.

Вар. 2. 1. Не может. 2. $RQ \approx 39{,}9$ см.

Вар. 3. 1. Не может. 2. $KE \approx 5{,}53$ см.

Вар. 4. 2. $AQ \approx 8{,}03$ см, $\angle P \approx 62°24'$.

С-9

Непосредственно перед выполнением данной работы желательно решить с учащимися № 9 к § 13 учебника. В случае необходимости можно дать учащимся и соответствующее указание.

Вар. 1. 1. 60°, 60°, 90°, 150°. 2. 3 стороны.

Вар. 2. 1. 20°, 60°, 100°, 140°, 220°. 2. $n=4$.

Вар. 3. 1. 40°, 80°, 80°, 120°, 160°, 240°. 2. 5 сторон.

Вар. 4. 1. Указание. Воспользоваться доказательством от противного. 2. 8 сторон.

С-10

Для вычисления радиуса окружности, описанной около правильного многоугольника или вписанной в него (первые задания), можно, конечно, воспользоваться формулами, приведенными в п. 116 учебника. Однако можно найти их и непосредственно один через другой. Для этого следует рассмотреть прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является радиус описанной окружности, а катетами — радиус вписанной окружности и половина стороны данного правильного многоугольника. При выполнении вторых заданий в первых трех вариантах учащиеся могут привлекать материал п. 117 учебника.

Вар. 1. 1. $\sqrt{2}$ см.

Вар. 2. 1. 3 см.

Вар. 3. 1. $\sqrt{3}$ см.

Вар. 4. 1. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ см. 2. $3\sqrt{3}$ см.

С-11

Задания работы относятся к п. 118—119 учебника. Для вычисления длины окружности принять $\pi=3{,}14$.

Вар. 1. 1. 31,4 см. 2. Как 3 : 1.

Вар. 2. 1. 15,7 см. 2. Как 2 : 1. Указание. Треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного равностороннего треугольника,— равносторонний.

Вар. 3. 1. 40,82 см. 2. Как 2 : 1. См. указание к вар. 2.

Вар. 4. 1. $L\approx\frac{25{,}12}{\sqrt{3}}$; $l\approx\frac{12{,}56}{\sqrt{3}}$.

С-12

Эта самостоятельная работа охватывает весь материал § 13 учебника. Вместе с тем при выполнении первых заданий (во всех вариантах) учащиеся должны проявить свои знания, умения и навыки, полученные в ходе изучения предшествующих тем, особенно при изучении § 7 и § 12 (решение прямоугольных и произвольных треугольников).

Вар. 1. 1. $a\sqrt{3}$, $2a$. 2. π см.

Вар. 2. 1. $b(1+\sqrt{2})$. 2. $\frac{15}{2\pi}$ дм.

Вар. 3. 1. $b\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. 2. $\frac{72}{25\pi}$ дм.

Вар. 4. 1. $2d(1+\sin 18^\circ)\approx 2{,}618d$. Замечание. Ответ может получиться и в виде другой формулы, например $d(1+\sqrt{2(1+\sin 18^\circ)})$ или $d\left(2+\frac{1}{2\sin 54^\circ}\right)$. Это зависит от того, какие треугольники рассматриваются. 2. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ м.

С-13

Задания данной работы предназначены для отработки умения пользоваться основными формулами для вычисления площади параллелограмма и треугольника, выведенными в п. 123—124 учебника. Целесообразно треугольник (вторые задания) задать на форматках.

Вар. 1. 1. 4,5 см.
Вар. 2. 1. 4 см.
Вар. 3. 1. 4 см.
Вар. 4. 1. Сторона равна 12 см, высота — 4 см.

С-14

Работа проводится после изучения п. 126 учебника. Трапецию целесообразно задать на форматках.

Вар. 1. 1. 600 см^2.
Вар. 2. 1. $840\sqrt{2}$ см^2.
Вар. 3. 1. 210 см^2.
Вар. 4. 1. 75 см^2.

С-15

Работа проводится после изучения п. 128 учебника. План участка можно задать в виде произвольного четырехугольника.

Вар. 1. 1. 4,86 см, площадь меньше в 4 раза. 2. 112,5 см^2.
Вар. 2. 2. 88, 24, 48 и 56 см, площадь больше в 64 раза.
Вар. 3. 2. 8, 12, 16 и 20 см, площадь больше в 16 раз.
Вар. 4. 1. $1:\sqrt{2}$. 2. 96 см^2.

С-16

Работа проводится после изучения п. 129 учебника. Обоснования со ссылками на свойства площади при выполнении вторых заданий не предполагаются, но учитель по своему усмотрению может это задание усложнить.

Вар. 1. 1. $\frac{\pi}{4}$. 2. $a^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$.

Вар. 2. 1. $\frac{4}{\pi}$. 2. $b^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$.

Вар. 3. 1. $\frac{1}{2\pi}$. 2. $a^2\left(2-\frac{\pi}{4}\right)$.

Вар. 4. 1. $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. 2. $a^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)$.

С-17

В отличие от заданий предшествующих работ по этому параграфу, первые задания данной самостоятельной работы (варианты 2—4) являются задачами на доказательство. Чтобы доказать, что два треугольника равновелики, вычислять их площади не обязательно: достаточно установить, что у них равны основания и высоты, опущенные на эти основания. В более сложных ситуациях, как в задании варианта 4, применяются и другие соображения. Вторые задания во всех вариантах — на вычисление. В вариантах 2 и 3 принять $\pi = 3{,}14$.

Вар. 1. **1.** 480 см^2. **2.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ м и $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ м.

Вар. 2. **2.** 1256 см^2.
Вар. 3. **2.** 314 см^2.
Вар. 4. **2.** π см^2. Указание. Докажите сначала, что сумма оснований описанной трапеции равна сумме длин ее боковых сторон.

С-18

В стереометрии, в отличие от планиметрии, главное внимание уделяется пространственным фигурам. Отсюда цель данной работы — проверка правильности исходных пространственных представлений при переходе к изучению стереометрии. Делается это, разумеется, на простейших примерах (первые три варианта). Для решения варианта 4 сначала надо доказать, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются, а затем — что прямая CC_1 проходит через их точку пересечения. В задании 1 требуемое утверждение следует из аксиомы VIII. А в задании 2 надо провести прямую, проходящую через точку пересечения прямых AA_1 и BB_1 и, например, точку C, и доказать, что на этой прямой лежит и точка C_1, воспользовавшись аксиомой параллельных.
Вар. 1. **1.** Пересекаются. **2.** Не пересекаются.
Вар. 2. **1.** Могут. **2.** Не могут.
Вар. 3. **1.** Могут. **2.** Может.

С-19

Отрицательный ответ на каждый из поставленных вопросов следует обосновать, а утвердительный — подкрепить подтверждающим примером.
Вар. 1. **1.** Может. **2.** Не может (у куба 6 граней).
Вар. 2. **1.** Может. **2.** Может.
Вар. 3. **1.** Может. **2.** Может.
Вар. 4. **1.** Не может (у правильного пятиугольника нет параллельных сторон). **2.** Может.

С-20

Работа посвящена осевым сечениям цилиндра и конуса и представлению о них как о телах вращения.
Вар. 1. **1.** 3,75 см. **2.** Вокруг меньшей стороны.
Вар. 2. **1.** 672 см^2. **2.** Вокруг меньшего катета.
Вар. 3. **1.** 168 дм. **2.** Вокруг большего катета.
Вар. 4. **1.** 45°. **2.** Вокруг большей стороны.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Д-1. Указание. Первые два утверждения, являющиеся простыми следствиями определения преобразования подобия и теоремы 11.1, служат в качестве подготовительных к выполнению двух последующих заданий. Для выполнения задания 3 сначала надо вписать ромб в отмеченный угол треугольника так, чтобы четвертая его вершина не лежала на противолежащей стороне треугольника, что просто сделать, а затем применить гомотетию с центром в вершине этого угла, чтобы «вывести» ее на эту сторону. Аналогичные соображения применяются также при выполнении задания 4. В основу задания положена тема задачи 9 из § 11.

Д-2. *Вар.* 1. Указание. Воспользоваться свойством средней линии треугольника (теорема 6.7) и противолежащих углов параллелограмма (теорема 6.3).

Вар. 2. Указание. Чтобы найти стороны ромба, вписанного в треугольник, надо рассмотреть какую-нибудь пару образовавшихся при этом подобных треугольников. Для ответа на дополнительный вопрос следует учесть, что биссектриса треугольника является диагональю вписанного в него ромба. Задание можно разбить на варианты (по числу возможных случаев), предложив учащимся в каждом из них найти сторону ромба несколькими способами. В основу задания положена задача 45 из § 11. После изучения п. 106 учебника дополнительный вопрос следует предлагать в такой формулировке: «Используя полученный результат, докажите, что биссектриса треугольника делит сторону треугольника, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам».

Д-3. 1. $CD=4{,}8$ см. Указание. $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.

2. $DE=3{,}84$ см. Указание. $\triangle CDE \sim \triangle ABC$.

3. $EF=3{,}072$ см. Указание. $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

4. $DF=\dfrac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Д-4. Указание. Для доказательства первого утверждения воспользоваться свойствами углов, вписанных в окружность (п. 107 учебника), и теоремой о сумме углов треугольника. Отрезки AD и BC пересекаются потому, что при указанных условиях луч AD пересекает отрезок BC, а луч CB пересекает отрезок AD. Третье утверждение доказывается способом от противного с помощью предыдущего утверждения. Последнее утверждение, представляющее собой содержание № 56 из § 11, следует из предыдущего и теоремы 11.5.

Д-5. Указание. Все упражнения данного задания решаются с помощью следствия из теоремы синусов (см. учебник, п. 111), причем доказательство третьего утверждения непосредственно сводится к предыдущему. При доказательстве последнего утверждения надо обратить внимание на наличие тупых углов.

Д-6. Указание. Первые два упражнения — подготовительные к двум последним (для доказательства четвертого утверждения по существу остается установить только расположение основания высоты треугольника по отношению к точке D и середине стороны AC). Данные задания представляют собой развитие темы № 25 к § 12 учебника.

Д-7. Указание. Доказательства всех утверждений проводятся по рисункам. Первые два упражнения выполняются с помощью неравенства треугольника (теорема 7.3 и ее следствие для собственно треугольника), третье — с помощью теоремы 13.1 о длине ломаной, которая применяется к ломаным $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_3B_4A_3$. Чтобы усилить последнее утверждение, надо доказать, что при переходе, например, от ломаной $A_1B_1B_2A_2$ к звену A_1A_2, соединяющему ее концы, на самом деле имеет место строгое неравенство. Для этого надо повторить рассуждение, с помощью которого доказывается теорема 13.1, и, пользуясь рисунком (а точнее тем, что по условию точки A_1, B_1, B_2, A_2 не лежат на одной прямой), установить наличие строгого неравенства.

Д-8. Указание. Для доказательства предлагаемого утверждения достаточно установить, что стороны четырехугольника равны, а углы его — прямые. Равенство сторон можно доказать с помощью одного из признаков равенства треугольников, а то, что все углы прямые,— либо с помощью теорем 13.2 и 4.4 о сумме углов выпуклого многоугольника и треугольника (первое решение), либо с помощью теоремы 13.3 о том, что правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность, и свойства углов, вписанных в окружность (второе решение).

Д-9. 1. 1 см. 2. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. 3. 60 см^2. 4. $\sqrt{97}$ см и 5 см. Указание. Упражнение можно решить как с помощью формулы Герона (диагонали параллелограмма являются положительными корнями биквадратного уравнения $\frac{S}{2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $S=24$, $a=5$, $b=6$, $p=\frac{11+x}{2}$), так и с помощью одной из формул п. 124 учебника (в этом случае придется также воспользоваться теоремой косинусов и основным тригонометрическим тождеством).

Д-10. Указание. При решении второго упражнения используется свойство средней линии треугольника. Решение третьего основано на выводе, что у данных треугольника и параллелограмма равны высоты (они равны высоте трапеции!). Для решения последнего упражнения надо воспользоваться свойством касательных, проведенных из одной точки к окружности. 1. 12 см^2. 2. 30 см^2. 3. 9 см. 4. 8 см^2.

Д-11. Указание. Треугольники AOB_1 и BOA_1 равновелики потому, что они дополняют треугольник AOB (или четырехугольник CA_1OB_1) до равновеликих треугольников (их площади равны половине площади исходного треугольника ABC). Требуемое утверждение можно также доказать, исходя из того, что треугольники ABB_1 и AA_1C в качестве общей части имеют $\triangle AOB_1$, а $\triangle BOA_1$ ни одному из них не принадлежит. Для решения дополнительного задания надо установить, что точки C, O и середина C_1 стороны AB лежат на одной прямой. А для этого достаточно установить, что и площадь треугольника BCC_1, и площадь «четырехугольника» $BCOC_1$ (состоящего из $\triangle BCO_1$ и равновеликих треугольников BOA_1 и A_1OC) равны половине площади исходного треугольника (если бы указанные точки не лежали на одной прямой, то площадь образованного ими треугольника была бы положительной, что в данном случае невозможно).

Д-12. 2. $R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 3. $R^2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 4. $264\frac{33}{64}\pi$ см^2. Указание. Сначала надо найти радиусы окружностей, вписанной и описанной около данного треугольника, воспользовавшись формулами из № 42 к § 14 учебника и формулой Герона.

Д-13

Работа может проводиться после изучения пункта 131 учебника.

1. Не может. 2. Воспользуйтесь тем, что пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости. 3. Если прямые b_1 и b_2 нескрещивающиеся, то они либо пересекающиеся, либо параллельные, т. е. в любом случае лежат в одной плоскости. 4. Проведите доказательство способом от противного, рассмотрев два случая: а) точка O лежит на одной из данных прямых a, b и c; б) точка O не лежит ни на одной из этих прямых.

Д-14

Работа может проводиться после изучения пункта 133 учебника.

$$V=\frac{5a^2H}{4}\operatorname{tg}54^\circ \text{ или } V=a^2H(1+\sin 54^\circ)\sin 108^\circ.$$

Возможны и другие выражения для V в зависимости от того, как вычисляется площадь правильного пятиугольника, лежащего в основании призмы. В частности, первая из приведенных формул получается, когда пятиугольник разбит на 5 одинаковых треугольников с общей вершиной в центре описанной окружности ($R=a/2\cos 54^\circ$), а вторая — когда пятиугольник разбит на три треугольника диагоналями, исходящими из одной вершины. Для решения дополнительного задания надо приравнять оба данных выражения для объема, положив $x=\sin 54^\circ$. Для x получается кубическое уравнение $8x^3+8x^2-8x-3=0$. Один его корень можно подобрать ($x_3=-3/2$). В результате получим:

$$V=\frac{a^2H}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Д-15

Работу можно провести непосредственно после изучения пункта 133 учебника.

$a^3\sin\alpha$. Данный параллелепипед можно рассматривать и как наклонный, и как прямой, если за основания принять его грани, не являющиеся квадратами. Отсюда два способа вычисления его объема.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ К ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

1. Утверждение следует из определения преобразования подобия.

2. Применить гомотетию с центром в точке O и воспользоваться тем, что при гомотетии, как и при любом преобразовании подобия, прямые переходят в прямые.

3. 2) Для одной из сторон угла построить гомотетичный ей луч с центром гомотетии M и коэффициентом, равным данному отношению. Точку пересечения построенного луча со второй стороной угла соединить прямой с точкой M.

4. Построить касательную к окружности в точке M_1, пересекающую AC в точке A_1 и BC в точке B_1 (рис. 24). Убедиться, что $CA_1+A_1M_1=CB_1+B_1M_1$, и воспользоваться гомотетичностью треугольников.

5. 1) Отрезки, соединяющие точку пересечения продолжений боковых сторон с серединами оснований, являются медианами двух подобных треугольников. Поэтому они образуют соответственно равные углы с продолжениями боковых сторон, т. е. лежат на одной прямой. Так же рассматриваются отрезки, соединяющие точку пересечения диагоналей с серединами оснований трапеции.

2) Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения. Получится прямоугольный треугольник. Середины оснований трапеции лежат на его медиане, проведенной из вершины прямого угла.

6. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AB.

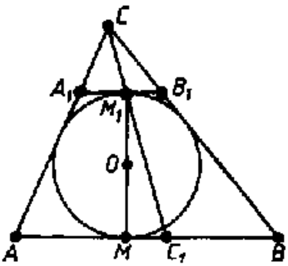


Рис. 24

7. Не может. Указание. Тупой угол, образованный медианой с основанием, больше всех остальных углов получившихся треугольников.

8. 36°, 72°, 72°.

9. По двум углам.

10. Рассмотреть подобные треугольники BHA_1 и ACA_1, HAB_1 и CBB_1.

11. Построить прямоугольный треугольник по отношению катета к гипотенузе, затем гомотетичный ему, используя известную сторону прямоугольника.

12. Из подобия треугольников, отсекаемых высотами, следует, что $\frac{b}{a}=\frac{h_a}{h_b}$, $\frac{c}{a}=\frac{h_a}{h_c}$. Сначала построить треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому по сторонам a_1, b_1, c_1, где a_1 — произвольный отрезок, $b_1=\frac{a_1h_a}{h_b}$, $c_1=\frac{a_1h_a}{h_c}$.

В частности, можно положить $a_1=h_b$ (см. № 73 к § 6 учебника, п. 61).

13. $MN=\frac{(a+b-c)\cdot c}{a+b+c}$. Решение. Пусть R, P, S и Q — точки касания окружности с AC, MN, CB и AB соответственно. Так как касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $P_{CMN}=CM+MN+CN=CM+MR+PN+CN=CR+CS=(AC-AQ)+$ $+(CB-BQ)=AC+CB-AB=b+a-c$. Из подобия $\triangle CMN$ и $\triangle CAB$ находим $MN=c\,\frac{a+b-c}{a+b+c}$.

14. Указание. $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$, а $P_{DEC}=a+b$ (треугольники ADK и BEK равнобедренные).

15. Указание. Воспользоваться задачей 14.

16. Если V — точка пересечения биссектрис, то (см. задачу 15) $\frac{AV}{VA_1}=\frac{b+c}{a}$, $\frac{BV}{VB_1}=\frac{a+c}{b}$, где a, b, c — стороны треугольника. Если

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}, \text{ то } (a-b)(a+b+c)=0,$$

следовательно, $a=b$.

17. $\frac{ab}{a+b}$. Указание. $CD=C_1D$, $\triangle ABC \backsim \triangle C_1BD$.

18. Пусть ABC — данный треугольник, AD — перпендикуляр, опущенный на прямую BC, $BE \parallel AD$, E лежит на AC (рис. 25). Так как по условию $\angle BAC = \angle ABE$ и $BE \parallel AD$, то $\angle BAC = \angle BAD$, т. е. AB — биссектриса прямоугольного $\triangle ACD$. Пусть $AD = x$, тогда (см. задачу 17) $AE = \frac{bx}{b+x}$, $EC = b - AE = \frac{b^2}{b+x}$. Из подобия $\triangle CBE$ и $\triangle CDA$ находим:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AE}{CE} = \frac{x}{b}, \text{ т. е. } BD = \frac{ax}{b}.$$

По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике CAD

$$AD^2 + CD^2 = x^2 + \left(a + \frac{ax}{b}\right)^2 = b^2.$$

Из этого квадратного уравнения находим: $x = b\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$. Применим теорему Пифагора к $\triangle ABD$.

$$c^2 = AD^2 + BD^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{b^2} = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\left(b \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right) = \frac{(b^2 - a^2)^2}{b^2 + a^2}.$$

19. BD — биссектриса угла ABC. Из подобия треугольников BDC и ABC следует, что

$$\frac{a}{CD} = \frac{c}{BD} = \frac{b}{a}, \quad CD = \frac{a^2}{b}, \quad BD = \frac{ac}{b}.$$

В треугольнике ABD углы при основании равны, следовательно, $BD = AD = b - CD$; тогда $b^2 - a^2 = ac$.

20. $2\sqrt{mn}$. Указание. Рассмотреть трапецию, образованную тремя данными касательными и диаметром, соединяющим точки касания. Найти вторую боковую сторону (высоту трапеции) с помощью теоремы Пифагора.

21. Треугольники подобны, значит, $a = ka_1$, $b = kb_1$, $c = kc_1$, $a^2 + b^2 = c^2$, или $aa + bb = cc$. Подставив вместо a, b и c их выражения через a_1, b_1, c_1, получим $aa_1 + bb_1 = cc_1$.

22. Опустить из точки A перпендикуляр AD на BC и провести диаметр AE. Использовать подобие прямоугольных треугольников ADB и ACE.

23. Использовать формулу задачи 22 и аналогичную формулу для расстояния d от точки A окружности радиуса R до прямой, касающейся окружности в точке B:

$$d = \frac{AB^2}{2R}.$$

24. Использовать результат задачи 22.

25*. Пусть точка A' симметрична точке A относительно точки M (рис. 26). Тогда $A'K \parallel AK'$ (см. задачу 10 из § 4 учебника) и, значит, $\angle BKA' = 180° - \alpha$, где $\alpha = \angle AXB$. Точку K можно построить, воспользовавшись утверждением задачи 58 из § 11 учебника. Задача может иметь два решения.

26. Рассмотрим гомотетию с центром A, переводящую окружность ω в окружность ω_1 (рис. 27). Точки N и P перейдут при этой гомотетии в точки N_1, P_1. Точка N_1 — точка пересечения окружности ω_1 с прямой AN. Точка P_1 — точка пересечения окружности ω_1 с прямой AP. Тогда прямая N_1P_1 как образ прямой NP при гомотетии параллельна ей. В силу параллельности прямых MQ и N_1P_1 хорды MN_1 и QP_1 равны, а значит, равны соответствующие им вписанные углы MAN_1 и QAP_1, т. е. $\angle MAN = \angle QAP$.

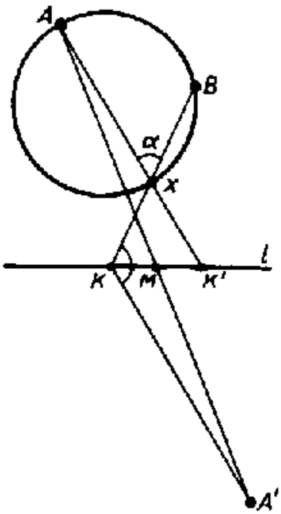


Рис. 26

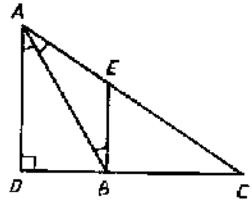


Рис. 25

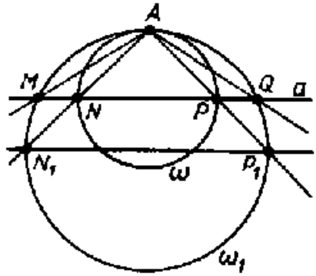


Рис. 27

27. Указание. Докажите сначала, что из точки касания окружностей отрезок их общей касательной виден под прямым углом. Искомое геометрическое место точек есть окружность, имеющая своим диаметром отрезок с концами в данных двух точках, которые геометрическому месту не принадлежат.

28. 4 см. Указание. Докажите сначала, что вершина прямого угла треугольника скользит по одной и той же прямой, проходящей через вершину данного прямого угла. Воспользуйтесь для этого свойством углов, вписанных в окружность.

29. Указание. Докажите сначала, что либо прямые MA и MB пересекаются на серединном перпендикуляре к отрезку AB, либо $\angle AMB=120^\circ$, либо $\angle AMB=60^\circ$. Воспользуйтесь № 58 к § 11 учебника.

30. а) 3,61 см; б) 5,86 см.

31. а) $\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{2}ab}$; б) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$; в) $\sqrt{a^2+b^2}$.

32. $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$ см.

33. а) $\angle A\approx 36^\circ 21'$; б) $\angle C\approx 26^\circ 23'$.

34. $AC=\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{3}}$, $BD=\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{3}}$.

35. $\cos x\approx 0{,}9899$, $x\approx 8^\circ 9'$.

36. Пусть стороны параллелограмма равны a и b, а его диагонали c и d ($c>d$). По теореме косинусов имеем:

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cos 45^\circ=a^2+b^2+ab\sqrt{2},$$

$$d^2=a^2+b^2-2ab\cos 45^\circ=a^2+b^2-ab\sqrt{2},$$

откуда $(cd)^2=(a^2+b^2)^2-(ab\sqrt{2})^2=a^4+b^4$.

37. а), б) $10\sqrt{2}$ см $\approx 14{,}1$ см.

38. а) $AB=10\sin 105^\circ$ см $\approx 9{,}66$ см, $BC=5\sqrt{2}$ см $\approx 7{,}07$ см; б) $AB=2\sin 50^\circ$ см $\approx 1{,}53$ см, $BC=2\sin 100^\circ$ см $\approx 1{,}97$ см.

39. а) $\angle C \approx 14°29'$, $\angle B \approx 135°31'$; б) $\angle C \approx 32°$, $\angle B \approx 103°$.

40. $\dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

41. Выразим сторону AC через α, β и γ: $\dfrac{a}{\sin(\beta+\gamma)}=\dfrac{AC}{\sin\beta}$; $AC=$ $=\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$. Из $\triangle ADC$ имеем $\left(\text{полагая } \varphi=\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\gamma}{2}\right)$: $\dfrac{AD}{\sin\gamma}=\dfrac{AC}{\cos\varphi}$, откуда $AD=\dfrac{AC\sin\gamma}{\cos\varphi}$. Подставляя вместо AC ее выражение через a, β и γ, получим: $AD=\dfrac{a\sin\gamma\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)\cos\left(\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\gamma}{2}\right)}$.

42. Можно доказать, что $CB_1=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, $AB_1=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}$ (рис. 28). Опустим перпендикуляр A_1A_2 на сторону AC. Из подобия треугольников CBB_1 и CA_1A_2 следует, что $A_1A_2=\dfrac{1}{2}BB_1$ и $B_1A_2=CA_2=\dfrac{1}{2}\times$ $\times B_1C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4b}$. Из подобия треугольников AA_1A_2 и AOB_1 следует, что $\dfrac{A_1A_2}{OB_1}=\dfrac{AA_2}{AB_1}=\dfrac{AB_1+B_1A_2}{AB_1}=$ $=1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2(b^2+c^2-a^2)}$.

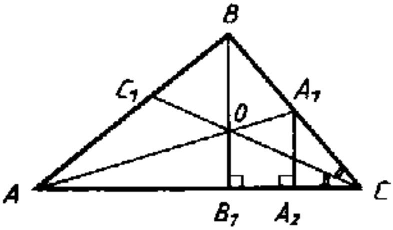


Рис. 28

По свойству биссектрисы CO в $\triangle CBB_1$ (п. 106 учебника) $\dfrac{BB_1}{OB_1}=\dfrac{BC+CB_1}{CB_1}=1+\dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}$, т. к. $\dfrac{BB_1}{OB_1}=2\dfrac{A_1A_2}{OB_1}$, то $1+\dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=$ $=2\left(1+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2(b^2+c^2-a^2)}\right)$, или $\dfrac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=\dfrac{2b^2}{b^2+c^2-a^2}$. Проведя тождественные преобразования, получаем $(a^2+b^2-c^2)(a+b)=2ab^2$.

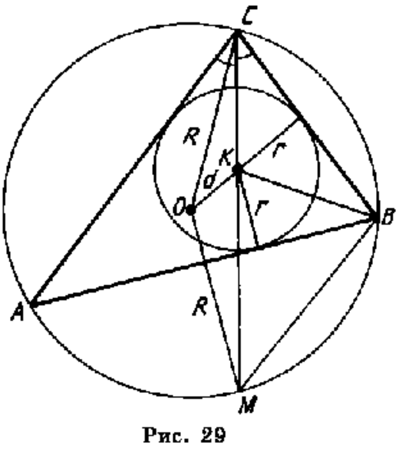


Рис. 29

43. Применить теорему синусов к треугольникам AOC и BOD.

44. Применить сначала теорему косинусов к треугольникам ACD и BCD. Затем сложить оба выражения для CD^2, вычесть выражение для AC^2 и преобразовать полученное равенство, воспользовавшись тем, что $AD+DB=AB$ и $AC=BC$.

45. Пусть O — центр описанной, а K — вписанной в треугольник ABC окружностей, CM — отрезок биссектрисы угла C, где точка M принадлежит описанной окружности (рис. 29). Для $\triangle MOC$ $d^2=R^2-CK\cdot KM$ (задача 44). В $\triangle MKB$ $\angle MKB=\angle MBK=\dfrac{\angle B}{2}+\dfrac{\angle C}{2}$, откуда $MK=MB$, но $MB=2R\sin\dfrac{C}{2}$. Так как $CK=\dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$, то $d^2=R^2-2Rr$.

46. Около треугольника ABC опишем окружность. Пусть CC_1 пересекает окружность в точке D. Тогда $\triangle ACC_1 \sim \triangle DCB$, откуда $\frac{CC_1}{CB}=\frac{AC}{CD}$, или $\frac{CC_1}{CB}=\frac{AC}{CC_1+C_1D}$, т. е. $CC_1^2+CC_1 \cdot C_1D=CB \cdot AC$. Но $CC_1 \cdot C_1D=AC_1 \cdot C_1B$ (п. 108), откуда $CC_1^2=CB \cdot AC-AC_1 \cdot C_1B$.

47. Используя свойство биссектрисы и теорему косинусов, составить систему двух уравнений относительно l_A и $\cos\frac{A}{2}$ и найти из нее l_A.

48. Воспользоваться теоремой косинусов.

50. Воспользоваться следствием теоремы синусов (см. учебник, п. 111).

51. Основание больше.

52. 15 см. Указание. Угол, лежащий против основания,— тупой.

53. Рассмотреть сначала случай, когда одна из взятых точек совпадает с вершиной треугольника.

54. Построить вспомогательный треугольник, сторонами которого являются стороны трапеции и разность ее оснований.

55. Построить вспомогательный треугольник, сторонами которого являются диагонали трапеции и сумма ее оснований.

56. Доказать сначала, что один из углов, прилегающих к боковой стороне трапеции, тупой (или прямой).

57. Не верно.

58. Катет BC больше. Указание. Треугольники ACM и BCM равнобедренные.

59. В приведенном «доказательстве» предполагается, что если $\angle A > \angle B + \angle C$, то $\sin A > \sin B + \sin C$. Как легко убедиться, это неверно. Такая задача была предложена Н. Г. Чернышевским в письме к своему брату.

60. Воспользоваться теоремой 13.1 о длине ломаной.

61. Вершины трапеции не лежат на одной прямой. Поэтому при использовании неравенств треугольника, как в доказательстве теоремы 13.1, на самом деле имеет место строгое неравенство.

62. Не может.

63. Не существует.

64. $AB+BD+DC=AC$. Провести доказательство способом от противного.

65. Воспользоваться неравенством треугольника.

66. См. указание к задаче 62.

67. Указание. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. Точки C и D лежат в одной из этих полуплоскостей или в разных.

68. Не может. Указание. Любые две соседние вершины такой ломаной лежат по разные стороны от данной прямой.

69. См. указание к задаче 68.

70. а) 1; б) 2; в) 3; г) $n-3$.

71. 3.

72. $n-2$.

73. 130°.

74. 14. Указание. Сначала доказать, что этот внешний угол равен 90°.

75. Воспользоваться результатом задачи 9 к § 13 учебника.

76. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Если внутренний угол многоугольника острый, то соответствующий ему внешний угол тупой. Следовательно, многоугольник не может иметь больше трех острых углов.

77. У к а з а н и е. Сумма углов треугольника в два раза меньше суммы углов выпуклого четырехугольника.

78. Не всегда (пример — ромб).

79. Да.

80. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$.

82. Погрешность приближенно равна 0,002, относительная погрешность составляет $\approx 0{,}2\%$.

83. Воспользоваться результатом задачи 25 к § 12 учебника.

84. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; в) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; г) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; д) $\frac{5\pi}{3}$.

85. а) 270° и 90°; б) 100° и 260°; в) 30° и 330°; г) 225° и 135°.

86. $\frac{5\pi}{3}$ см и 3π см.

87. 9,94 см.

88. а) $\frac{4l}{3\pi}\sqrt{\sqrt{2}+2}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}l$.

89. Погрешность равна $0{,}00034R$, относительная погрешность 0,005%.

90. $10+\frac{5\pi}{2}$ см $=\frac{5}{2}(\pi+4)$ см.

92. а) 6,25 см^2; б) 441 см^2.

93. а) 16 см; б) 8,764 м; в) 3,821 мм.

95. а) 4 см; б) 8,2 см, 4,1 см.

97. а) 28 см^2; б) 2,1 м^2.

98. 3 см.

99. 3:1.

100. 4,8 см.

101. $5\frac{1}{3}$ см. У к а з а н и е. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна удвоенной площади треугольника ADC.

102. Треугольники 1 и 2 и треугольники 3 и 4 равновелики, а так как $S_1+S_2=S_3+S_4$, то $S_1=S_2=S_3=S_4$.

104. а), б) 2 см^2.

105. 12 см^2.

106. 50 см^2.

107. $12\sqrt{2}$ см^2.

108. 4 см^2.

110. $40\sqrt{3}/13$ см.

112. $1{,}875\sqrt{2}$ см$^2\approx 2{,}64$ см^2. У к а з а н и е. Использовать результат задачи 47.

113. $\approx 4{,}6$ см.

114. $7{,}68a^2$.

115. 7:1. У к а з а н и е. Установить, что площадь центрального треугольника равна сумме площадей трех остальных треугольников разбиения. Найти сначала отношение, в котором один из проведенных отрезков делит другой, пересекая его. Для этого с помощью теоремы синусов выразить через стороны треугольника отношение синусов углов, на которые при этом разбивается угол треугольника.

116. Новые треугольники подобны данному, следовательно, их площади относятся как квадраты сходственных сторон. Сумма коэффициентов подобия равна 1.

117. а) $\frac{100}{3}\pi$ см^2; б) 100π см^2; в) $\frac{100}{2\sqrt{2}}\pi$ см^2.

118. а) 75π см^2; б) $\frac{25}{3-2\sqrt{2}}\pi$ см^2.

119. Указание. Найдите площадь кольца и сравните ее с площадью указанного круга.

120. $25\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ см^2.

121. Площадь каждой из двух заштрихованных фигур равна $\frac{1}{8}\pi d^2$.

122. $R^2(\pi-1)$.

123. $\frac{1}{2}a^2(\pi-\sqrt{3})$.

124. Одну или три.

125. Не могут.

126. Правильные утверждения 1), 3), 4).

127. Одну или три.

131. 1) Одна; 2) одна или три.

132. 1) Две или ни одной; 2) две или ни одной.

133. Параллельна.

134. Указание. Через точку A прямой a провести прямую, параллельную b, а через точку B прямой b провести прямую, параллельную a.

136. 10 дм.

137. 20 см, 20 см, 24 см.

138. Две или четыре.

139. Может (если одна из диагоналей куба перпендикулярна плоскости проекций).

140. 1) Можно; 2) можно; 3) можно.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ К РАЗЛИЧНЫМ ЗАДАЧАМ ПО КУРСУ ГЕОМЕТРИИ VII—IX КЛАССОВ

1. Имеем $\angle MNP+\angle NPQ=(180°-2\angle BNP)+(180°-2\angle BPN)=360°-2(\angle BNP+\angle BPN)=180°$ (см. рис. 11). Так как углы MNP и NPQ внутренние односторонние при прямых MN, PQ и секущей NP, то прямые MN и PQ параллельны. А значит, луч при отражении от двух взаимно перпендикулярных зеркал изменяет свое направление на противоположное.

2. $\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $180°-\frac{\alpha+\beta}{2}$.

3. Не могут. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

4. 8 см, 24 см. Указание. Воспользоваться утверждением задачи 43 к § 4 учебника.

5. 30° и 60°. Указание. Выполнить дополнительное построение, как и в задаче 43 к § 4 учебника.

6. 15° и 75°. У к а з а н и е. Соединить вершину прямого угла с серединой гипотенузы и воспользоваться утверждением задачи 51 к § 11 учебника.

7. Воспользоваться свойством средней линии треугольника.

8. а) b, c, a; б) c, $a=b$. У к а з а н и е. Воспользоваться следствием теоремы синусов.

9. См. указание к задаче 8.

10. а) $a+c$; б) равнобедренный с основанием BC.

11. $a/2$. У к а з а н и е. Диагональ соединяет вершины тупых углов данного параллелограмма.

14. Построить сначала прямоугольный треугольник по гипотенузе (5 см) и катету (4 см). См. задачу 35 к § 5 учебника.

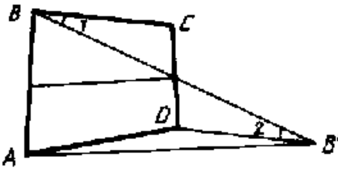


Рис. 30

15. Воспользоваться дополнительным построением, как и в доказательстве теоремы 6.8 о средней линии трапеции (рис. 30). Доказать, что точки A, B' и D лежат на одной прямой.

16. Воспользоваться утверждением задачи 55 к § 6 учебника.

20. Учесть, что сумма всех углов трапеции равна 360°, а сумма двух из них, прилегающих к боковой стороне,— 180°, т. е. в два раза меньше.

21. 10 см, 34 см. У к а з а н и е. Прямой, параллельной боковой стороне трапеции и проходящей через одну из ее вершин, можно разбить трапецию на параллелограмм и равносторонний треугольник.

22. 132 см. См. указание к предыдущей задаче.

23. Обратить внимание на определение касательной к окружности (см. п. 40).

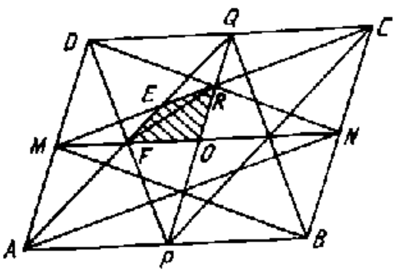


Рис. 31

24. Рассмотреть параллелограмм $MOQD$ (рис. 31), площадь которого равна $\frac{1}{4}$ площади параллелограмма $ABCD$, $S_{FORE}=$ $=S_{FOR}+S_{RFE}=\frac{1}{4}S_{MOQ}+\frac{1}{12}S_{MOQ}=$ $=\frac{1}{3}S_{MOQ}=\frac{1}{6}S_{MOQD}$.

26. Середины сторон четырехугольника являются вершинами ромба, у которого диагонали — средние линии четырехугольника. Площадь ромба равна половине площади четырехугольника.

27. $S=\frac{b^2-a^2}{2}$.

28. $\sqrt{2(a^2-S)}$. У к а з а н и е. Доказать, что стороны вписанного прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

29. Уравнение искомой прямой l записать в виде $y=kx+b$, где k и b необходимо определить. Так как l параллельна прямой $y=2x-5$, то $k=2$. Точка A принадлежит l, поэтому $-1=2\cdot 3+b$, откуда $b=-7$, значит $y=2x-7$.

30. Чтобы точки A, B и C принадлежали одной прямой, не параллельной оси ординат, необходимо и достаточно, чтобы угловые коэффициенты прямых AB и AC были равны, т. е. $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$.

Если эти точки принадлежат прямой, параллельной оси ординат, то $x_1 = x_2 = x_3$.

31. $k = 7$.

32. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром квадрата, а оси проходили через противоположные вершины квадрата. Координаты вершин: $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $C(-a, 0)$, $D(0, -a)$, а уравнение прямой, проходящей через центр квадрата, $y = kx$. Вычислим сумму квадратов расстояний от вершин квадрата до прямой $y = kx$: $\frac{1}{1+k^2}(k^2a^2 + a^2 + k^2a^2 + a^2) = \frac{2(1+k^2)a^2}{1+k^2} = 2a^2$. Полученная сумма не зависит от k.

33. Выбрать систему координат так, чтобы ее начало совпало с центром квадрата, а оси были параллельны сторонам квадрата.

34. Выбрать систему координат так, чтобы вершины параллелограмма имели координаты $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $D(b, c)$, $C(a+b, c)$.

35. Вся плоскость.

36. а) Построить $CM \parallel OB$ и $CN \parallel OA$, четырехугольник $OMCN$ — ромб (рис. 32). В треугольнике MCA $MA = \frac{1}{2}MC$, откуда $MA = \frac{1}{2}MO$, т. е. $\overline{OM} = \frac{2}{3}\overline{OA}$. Очевидно, $\overline{ON} = \frac{2}{3}\overline{OB}$. Но $\overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON}$, откуда $\overline{OC} = \frac{2}{3}(\overline{OA} + \overline{OB})$; б) $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$; в) $\overline{OC} = 2(\overline{OA} + \overline{OB})$.

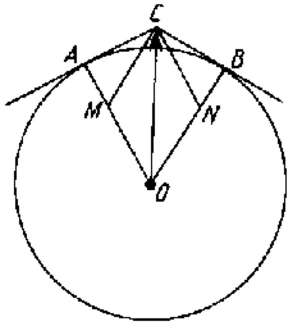


Рис. 32

37. а) $\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\overline{OA} + \overline{OB})$; б) $\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\overline{OA} + \overline{OB})$; в) $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$.

38. $M\left(0, \frac{7}{2}\right)$, $N\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\overline{MN}\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\overline{NP}\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, $\overline{PM}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

39. а) $\overline{AB} = \overline{DC}$, $D(xy)\begin{cases}-1-2 = 1-x \\ 4-3 = 1-y,\end{cases}$ $x = 4$, $y = 0$; б) $(0, 6)$; в) $(-2, 2)$.

40. $\overline{AA_1}\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{BB_1}\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $\overline{CC_1}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

41. $\overline{AB}(4, 6)$, $\overline{CD}(-2, -3)$, $\overline{AB} = -2\overline{CD}$.

42. $m_1 = 4$, $m_2 = -4$.

43. Пусть $\overline{b}(x, y)$, тогда $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, т. е. $xx_0 + yy_0 = 0$ и $y = \frac{-x_0}{y_0}x$. $|\overline{a}| = |\overline{b}|$, тогда $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Подставив в это уравнение значение y, получим уравнение $x^2\left(1 + \frac{x_0^2}{y_0^2}\right) = x_0^2 + y_0^2$, из которого $x = \pm y_0$. Значит, $\overline{b_1}(y_0 - x_0)$, $\overline{b_2}(-y_0, x_0)$.

44. $AA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BB_1 = \frac{\sqrt{65}}{2}$, $CC_1 = \frac{\sqrt{89}}{2}$. Указание. Воспользоваться формулами для координат середины отрезка и расстояния между точками.

45. Воспользоваться тем, что BN и DM — медианы $\triangle ABD$, и равенством $S_{AMPN}=S_{ABD}-S_{BDN}-S_{BDM}+S_{BDP}$.

46. Искомой является общая хорда данной окружности и окружности, ей симметричной относительно данной точки.

48. Центр симметрии параллелограмма есть точка пересечения его диагоналей. Для построения этой точки можно воспользоваться тем свойством, что через нее проходят прямые, параллельные сторонам и делящие высоты параллелограмма пополам.

49. Ось симметрии четырехугольника либо содержит его диагональ, либо является общим серединным перпендикуляром для пары противолежащих сторон. Поэтому осей симметрии не может быть больше 4. Четыре оси симметрии имеет квадрат, одну — равнобокая трапеция, две — ромб и прямоугольник. Если существует 3 оси симметрии, то хотя бы одна из них содержит диагональ и хотя бы одна является серединным перпендикуляром к паре сторон. Но такой четырехугольник — квадрат, т. е. четырехугольников с ровно 3 осями симметрии не существует.

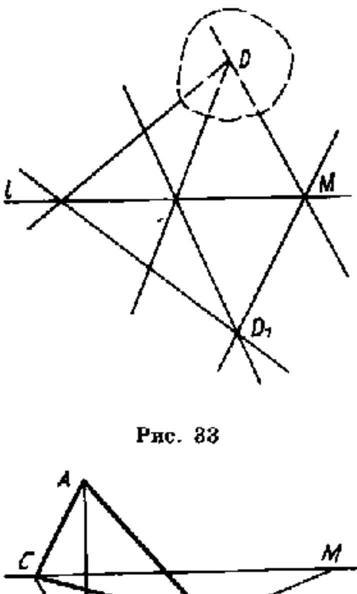


Рис. 33

50. Через точку M проведем прямую l, пересекающую стороны угла. Пусть D_1 симметрична D относительно l (рис. 33). Тогда MD_1 — образ искомой прямой при симметрии относительно прямой l.

51. Построим образ A_1 точки A при симметрии относительно прямой p (рис. 34). Через точки A_1 и B проводим прямую, которая пересечет p в точке M. Взяв на прямой p другую точку C, соединив ее с точками A_1 и B, получим треугольник BA_1C. $AC-BC=A_1C-BC\leqslant A_1B$. Поэтому искомая разность будет наибольшей, если точка C совпадает с M. Задача не имеет решения, если расстояния точек A и B от прямой p равны друг другу.

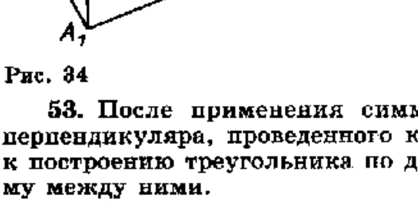


Рис. 34

52. Только точка пересечения двух осей симметрии является сдвоенной парой в двух симметриях.

53. После применения симметрии относительно серединного перпендикуляра, проведенного к третьей стороне, задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу, заключенному между ними.

54. Нельзя.

55. Решение аналогично решению предыдущей задачи.

56. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник: $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$. Провести через точку B прямую, параллельную CD, до пересечения с AD в точке M. От вершины B на отрезке BM отложить $BK=c$. Теперь легко получить третью вершину (C) четырехугольника.

57. Ось симметрии пятиугольника проходит через вершину и середину противоположной стороны. Далее воспользоваться тем, что если l_1 и l_2 — две оси симметрии фигуры и l_3 симметрична l_1 относительно l_2, то l_3 тоже ось симметрии.

58. Нет (рис. 35).

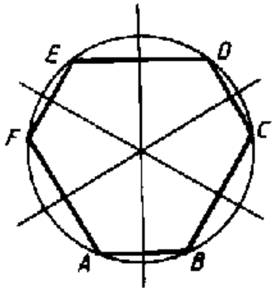


Рис. 35

59. Через центр окружности провести три прямые a_1, a_2 и a_3, перпендикулярные данным. Пусть OK — произвольный радиус окружности, OK_1 симметричен OK относительно a_1, OK_2 симметричен OK_1 относительно a_2, OK_3 симметричен OK_2 относительно a_3. Биссектриса угла KOK_3 проходит через вершину искомого треугольника.

60. Постройте хорду окружности данной длины и окружность, концентрическую данной, проходящую через данную точку. Рассмотрите поворот вокруг центра окружностей, при котором данной точке соответствует точка пересечения построенных хорды и окружности.

61. Четырехугольник — равнобокая трапеция. Осью симметрии является прямая, проходящая через середины оснований AB и CD.

62. См. указание к задаче 59.

63. Параллельно любой из диагоналей прямоугольника.

64. Переносом боковой стороны в направлении и на расстояние, определяемые основанием трапеции, получить треугольник. Вычислить высоту треугольника.

66. Если произведение коэффициентов двух гомотетий отлично от единицы, то получаем гомотетию. В противном случае — либо параллельный перенос, либо тождественное преобразование. Поскольку центры данных гомотетий различны и произведение коэффициентов равно 1, имеем параллельный перенос.

67. Если результирующее преобразование — гомотетия, то любая прямая, проходящая через центр этой гомотетии; если — параллельный перенос, то любая прямая, параллельная направлению переноса.

68. Треугольники гомотетичны с центром M, следовательно, и окружности, описанные около этих треугольников, гомотетичны, и центр гомотетии принадлежит окружностям, т. е. является их точкой касания.

69. См. задачу 68.

70. Треугольник, образованный средними линиями данного треугольника, равен треугольнику из предыдущей задачи.

71. Преобразование, которое получается в результате последовательного выполнения гомотетии с центром O и коэффициентом k ($k > 0$) и симметрии относительно точки O, также иногда называется гомотетией с тем же центром, но с коэффициентом, равным $-k$. Воспользоваться этим для решения данной задачи. Для чего

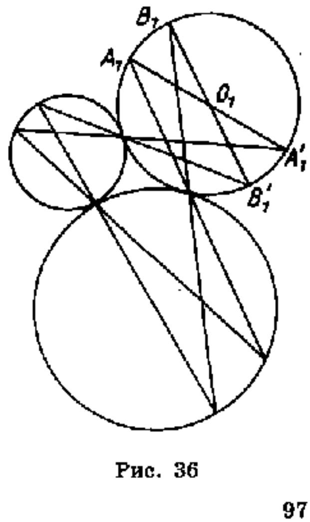


Рис. 36

рассмотреть гомотетии с центрами в точках касания и коэффициентами: $-\frac{R_2}{R_1}, -\frac{R_3}{R_2}, -\frac{R_1}{R_3}$ (рис. 36). Последовательное выполнение этих гомотетий является снова гомотетией с коэффициентом, равным произведению указанных трех коэффициентов (см. задачу 66), т. е. -1, а значит, является симметрией относительно некоторой точки. Поскольку при этой симметрии одна из окружностей переходит в себя, то ее центр и совпадает с этой точкой. Поэтому, чтобы найти центр этой окружности, надо взять на ней две точки A_1 и B_1 и построить, как показано на рисунке 36, точки, в которые они переходят при рассматриваемой симметрии, т. е. точки A_1' и B_1'. Тогда A_1A_1' и B_1B_1' — диаметры окружности, а точка их пересечения O_1 — ее центр.

73. Построить сначала на основании сегмента какой-нибудь квадрат, середина стороны которого совпадает с серединой O основания. Затем воспользоваться гомотетией с центром O (рис. 37).

74. Построить сначала любой квадрат, две вершины которого лежат на одном радиусе, а третья — на другом.

75. Пусть C_1, C_2, C_3 соответственно середины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (рис. 38). Гомотетия с центром O (точка пересечения a и b) и коэффициентом $k_1=-\frac{OA_2}{OA_1}$ (см. указание к задаче 71) переводит точку C_2 в точку C_1, а гомотетия с тем же центром, но с коэффициентом $k_2=-\frac{OA_3}{OA_1}$ переводит точку C_3 в точку C_1. Это значит, что как точки O, C_1, C_2, так и точки O, C_1, C_3 принадлежат одной прямой. Очевидно, эти прямые совпадают, следовательно, точки C_1, C_2, C_3 принадлежат прямой, проходящей через O.

76. Пусть четырехугольник не является трапецией ($AB \nparallel DC$). Гомотетия с центром S и коэффициентом $k=\frac{SD}{SA}$ переводит точку B в точку B_1, а точку M в точку M_1. Средняя линия треугольника CDB_1 не параллельна основанию, что невозможно.

77. Провести через точку N прямую, параллельную BC, пересекающую AB в точке O, а через точку D прямую, параллельную BC и пересекающую MN и AB соответственно в точках P и R (рис. 39). Записать равные отношения: $k=\frac{AN}{ND}=\frac{AO}{OR}=\frac{AO}{NP}=\frac{a-d}{d-b}$, откуда $d=\frac{a+kb}{1+k}$ и $k=\frac{a-d}{d-b}$.

79. При доказательстве воспользоваться методом от противного. Пусть сторона DC не параллельна AB, причем середины сторон AB и CD и точка S пересечения диагоналей четырехугольника принадлежат одной прямой (рис. 40). Проводим $DC_1 \parallel AB$, точка C_1 принадлежит AC. Прямая MN пересекает отрезок DC_1 в его сере-

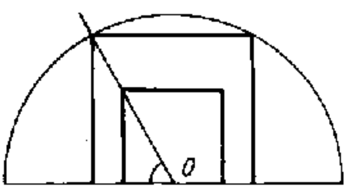


Рис. 37

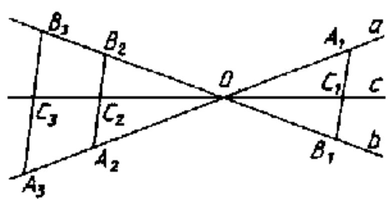


Рис. 38

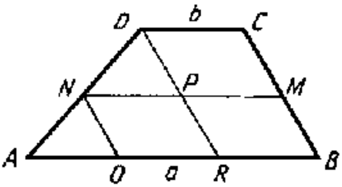


Рис. 39

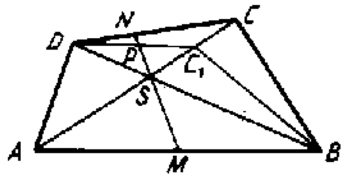


Рис. 40

дине P. Но тогда NP — средняя линия треугольника DCC_1 и $NP \parallel CC_1$, что противоречит принадлежности точки S прямой NP.

80. Можно, если треугольник не равносторонний.

81. Не может.

83. Достаточно доказать равенство одной пары углов, например A и A_1 (рис. 41). $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{d}{d_1}$. Для этого нужно построить прямые DM и D_1M_1, параллельные соответственно CB и C_1B_1. В треугольниках ADM и $A_1D_1M_1$ $\frac{d}{d_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{a-c}{a_1-c_1}$ $\left(\text{так как } \frac{a}{a_1}=\frac{c}{c_1}, \text{ то } \frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}\right.$ и $\left.\frac{a-c}{c}=\frac{a_1-c_1}{c_1};\quad \frac{a-c}{a_1-c_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{d}{d_1}\right)$, следовательно, они подобны и $\angle A=\angle A_1$.

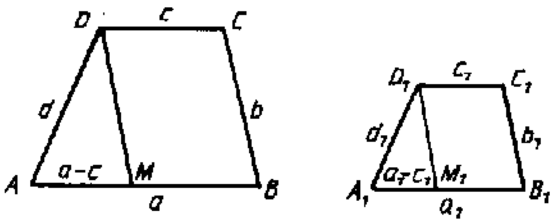


Рис. 41

84. $d=\sqrt{ab}$.

85. Построить прямоугольный треугольник по известному отношению катета к гипотенузе, затем — ему гомотетичный, используя известную сторону прямоугольника.

86. NM, MD и MC — расстояния от точки M до прямых AB, SA и BS соответственно (рис. 42). Треугольники MAD и MBN, MNA и MCB подобны, следовательно, $\frac{MD}{MN}=\frac{MA}{MB}=\frac{AD}{BN}$ и $\frac{MA}{MB}=\frac{MN}{MC}=$ $=\frac{NA}{CB}$, откуда $\frac{MD}{MN}=\frac{MN}{MC}$.

87. В зависимости от положения точек M и N углы BAM и BAN либо являются смежными, либо совпадают (рис. 43, *а*, *б*). Тогда по теореме о вписанных углах соответствующие центральные углы BO_1M и BO_2N равны. Поэтому хорды BM и BN относятся как радиусы окружностей.

88. $2\sqrt{mn}$.

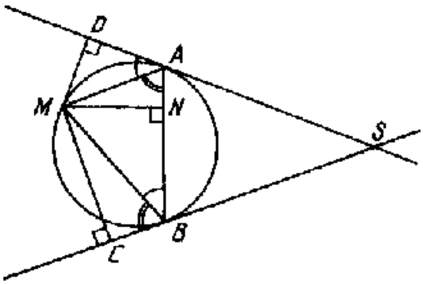


Рис. 42

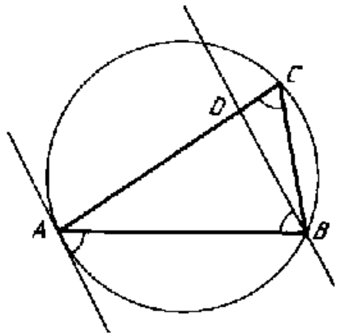
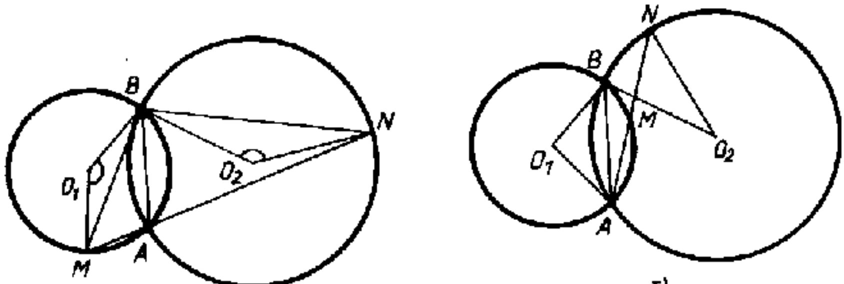


Рис. 44



а) б)

Рис. 43

89. Треугольники подобны, значит, $a=ka_1$, $b=kb_1$, $c=kc_1$ и $aa_1+bb_1=k(a^2+b^2)=kc^2=cc_1$.

90. В треугольниках ABC и ABD (рис. 44) угол BAC общий, угол ABD равен углу ACB, так как они опираются на равные дуги (симметричные относительно диаметра, проходящего через A). Из подобия треугольников следует, что $AB^2=AD\cdot AC$.

91. 40°, 60°, 80°.

92. 12°25′30″, 12°25′30″, 155°9′.

93. Точка пересечения серединного перпендикуляра к стороне треугольника с продолжением биссектрисы лежит на окружности, описанной около данного треугольника.

94. а) 14,5 см и 6 см; б) 25 см и 10 см.

95. 12,5 см.

96. 90°, 22°30′, 67°30′. Указание. Описать около этого треугольника окружность и продолжить высоту до пересечения с окружностью. Доказать, что один из углов треугольника в 4 раза больше другого.

97. 35°, 55°. Указание. Описать около данного треугольника окружность, продолжить биссектрису до пересечения с окружностью и соединить полученную точку с серединой гипотенузы. Найти углы полученного треугольника и углы между медианой и гипотенузой.

98. 38°, 52°. См. указание к предыдущей задаче.

99. $36°$, $72°$, $108°$, $144°$, или $60°$, $90°$, $90°$, $120°$, или $\frac{360°}{7}$, $\frac{540°}{7}$, $\frac{720°}{7}$, $\frac{900°}{7}$. *Указание.* Суммы противоположных углов вписанного четырехугольника равны.

100. В четырехугольнике AB_1KC_1 $\angle C_1 = \angle B_1 = 90°$, так как BB_1 и CC_1 по условию высоты треугольника и, следовательно, $BB_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp AB$. Таким образом, $\angle A + \angle K = 180°$. Следовательно, около четырехугольника AC_1KB_1 можно описать окружность.

101. Пусть в $\triangle ABC$ сторона $BC = a$, $AB = AC$, $\angle A = \alpha$, AA_1 и BB_1 — медианы. Опустим перпендикуляр B_1D на BC, тогда $CD = \frac{a}{4}$, $BD = \frac{3a}{4}$. Отрезок

$$B_1D = \frac{AA_1}{2} = CD\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

и $\angle B_1BD = \beta$ при возрастании α уменьшается.
Имеем: $AA_1 = 2B_1D = 2BB_1 \sin\beta$. Если $\alpha = 60°$, то $\beta = 30°$ и $AA_1 = BB_1$, если $\alpha > 60°$, то $\sin\beta < \frac{1}{2}$ и $AA_1 < BB_1$; если $\alpha < 60°$, то $AA_1 > BB_1$.

102. Заметим, что $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$. Обозначим через a и b длины катетов прямоугольного треугольника ABC, через c длину гипотенузы, $\angle A = \alpha$, тогда

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha,\ \frac{a}{c} = \sin\alpha,\ \text{следовательно,}\ \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{a+b}{c} \leqslant \sqrt{2}.$$

103. $m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$, $m_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$, $\frac{m_a^2}{m_b^2} = \frac{\frac{a^2}{4} + b^2}{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{4a^2+16b^2}{4a^2+b^2}\right) > \frac{1}{4}$ или $\frac{m_a}{m_b} > \frac{1}{2}$. Аналогично $\frac{m_b}{m_a} > \frac{1}{2}$.

104. По теореме косинусов в треугольниках ABC и BCC_1, где CC_1 — биссектриса угла C, имеем:

$$\cos ABC = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \left(\frac{ca}{a+b}\right)^2 - l_C^2}{2a\left(\frac{ca}{a+b}\right)},$$

откуда

$$l_C^2 = CC_1^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right] = \frac{2abp}{a+b}\left(1 - \frac{c}{a+b}\right),\ \text{где}\ p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Аналогично $l_A^2 = \frac{2bcp}{b+c}\left(1 - \frac{a}{b+c}\right)$, $l_B^2 = \frac{2acp}{a+c}\left(1 - \frac{b}{a+c}\right)$.

Складывая, получаем:

$$l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 = p\left(\left(1 - \frac{c}{a+b}\right)\frac{2ab}{a+b} + \left(1 - \frac{b}{a+c}\right)\frac{2ac}{a+c} + \left(1 - \frac{a}{b+c}\right)\frac{2bc}{b+c}\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2},\ \frac{2bc}{b+c} \leqslant \frac{b+c}{2},\ \frac{2ac}{a+c} \leqslant \frac{a+c}{2},$$

получаем:

$$l_A^2 + l_B^2 + l_C^2 \leqslant \frac{p}{2}\left((a+b-c) + (a+c-b) + (b+c-a)\right) = p^2.$$

105. Имеем: $S=rp$, где S — площадь треугольника. По формуле Герона $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$. Отсюда $r^2=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$. Но по свойству среднего арифметического трех чисел $(p-a)(p-b)\times\times(p-c)\leqslant\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}$. Откуда $r^2\leqslant\frac{p^2}{27}$, или $r\leqslant\frac{p}{3\sqrt{3}}$. Следовательно, $S=rp\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

106. По формуле Герона $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{h_A^2a^2}{4}$. Далее, $a^2\geqslant a^2-(b-c)^2=(a+c-b)(a+b-c)=4(p-b)(p-c)$. Отсюда

$$h_A=\sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}}\leqslant\sqrt{p(p-a)}.$$

107. Согласно задаче 104 имеем: $l_A^2=\frac{2bcp}{(b+c)^2}(b+c-a)=\frac{4bc}{(b+c)^2}\times\times p(p-a)$. Но $4bc\leqslant(b+c)^2$, поэтому $l_A^2\leqslant p(p-a)$.

108. $S=\frac{bc\sin\alpha}{2}\leqslant\frac{bc}{2}$, где α — угол между сторонами AB и AC треугольника ABC и $AB=c$, $AC=b$. Но $bc\leqslant\frac{b^2+c^2}{2}$, поэтому $S\leqslant\frac{b^2+c^2}{4}$.

109. Обозначим $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Площадь $\triangle ABC$ равна $S=\frac{ab}{2}=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)r$, откуда $r=\frac{ab}{a+b+c}$. Кроме того, $R=\frac{c}{2}$, поэтому $R+r=\frac{ab}{a+b+c}+\frac{c}{2}=\frac{2ab+ac+bc+c^2}{2(a+b+c)}=\frac{2ba+bc+ac+a^2+b^2}{2(a+b+c)}=$
$=\frac{(a+b)^2+c(a+b)}{2(a+b+c)}=\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}=\sqrt{2S}$.

110. $2\overline{AA_1}=\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AB_1}+\overline{AC_1}=(\overline{AC}+\overline{CB_1})+(\overline{AB}+\overline{BC_1})$, т. е. $\overline{CB_1}+\overline{BC_1}=\overline{0}$.

111. $\overline{MG}=\overline{MA}+\overline{AG}$, $\overline{MG}=\overline{MB}+\overline{BG}$, $\overline{MG}=\overline{MC}+\overline{CG}$.

Складывая почленно, получим $3\overline{MG}=(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC})+(\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG})$, откуда (см. дополнительную задачу 12) $3\overline{MG}=\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}$.

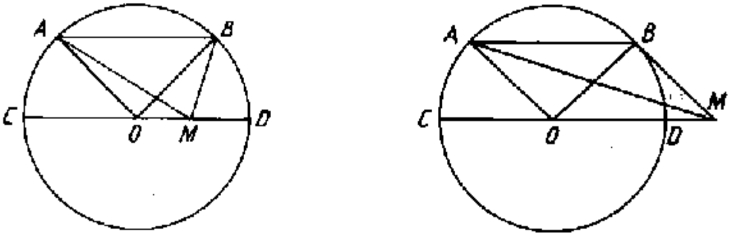
112. Пусть O — произвольная точка плоскости. Согласно результату задачи 111 $\overline{OM_1}=\frac{1}{3}(\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1})$, $\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$. Вычтем из первого равенства второе: $\overline{OM_1}-\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA_1}-\overline{OA}+\overline{OB_1}-\overline{OB}+\overline{OC_1}-\overline{OC})$. $\overline{MM_1}=\frac{1}{3}(\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1})$.

113. По теореме косинусов из $\triangle BOM$ и $\triangle AOM$ (рис. 45) имеем: $BM^2=R^2+OM^2-2ROM\cos BOM$, $AM^2=R^2+OM^2+2ROM\cos BOM$. Отсюда $AM^2+BM^2=2(R^2+OM^2)$.

115. Применить теорему косинусов к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$.

116. См. указание к предыдущей задаче.

117. I способ. Пусть ABC — данный треугольник и AA_1 и BB_1 — его биссектрисы (рис. 46). Предположим, что этот треугольник не равнобедренный. Тогда $\alpha\neq\beta$. Пусть $\alpha>\beta$. Проведем через точки B_1 и A_1 прямые, параллельные прямым AA_1 и AB_1 соответственно. Они



а) б)

Рис. 45

пересекутся в некоторой точке D. Четырехугольник AB_1DA_1 — параллелограмм. Сторона B_1D этого параллелограмма пересекает, очевидно, луч BC (в точке M).

Рассмотрим треугольники BAA_1 и ABB_1. У них сторона AB общая, $AA_1 = BB_1$ по условию и угол $\alpha > \beta$ по предположению. Значит, $A_1B > AB_1$. Но $AB_1 = A_1D$ как противолежащие стороны параллелограмма. Поэтому $A_1B > A_1D$. Тогда в треугольнике A_1BD угол A_1DB больше угла A_1BD (следствие теоремы 12.2).

Рассмотрим теперь треугольник BB_1D. Он равнобедренный, так как $B_1D = AA_1$ как противолежащие стороны параллелограмма, а $AA_1 = BB_1$ по условию задачи. Значит, $\angle B_1DB = \angle B_1BD$. Но $\angle B_1DB = \alpha + \angle A_1DB$, а $\angle B_1BD = \beta + \angle A_1BD$. Так как по предположению $\alpha > \beta$, то угол A_1DB меньше угла A_1BD. Мы пришли к противоречию, поскольку выше было доказано противоположное неравенство.

Точно так же доказывается, что ошибочно и предположение $\alpha < \beta$. Значит, треугольник ABC равнобедренный.

II способ. В решении задачи 104 получены формулы: $l_A^2 = \frac{2bcp}{b+c}\cdot\left(1-\frac{a}{b+c}\right)$, $l_B^2 = \frac{2acp}{c+a}\left(1-\frac{b}{a+c}\right)$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

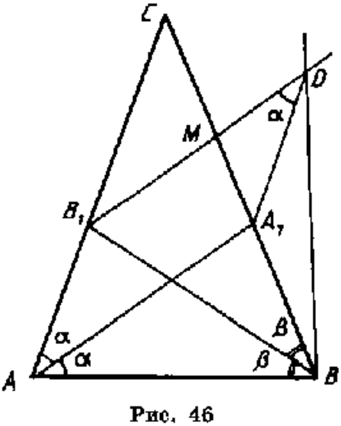


Рис. 46

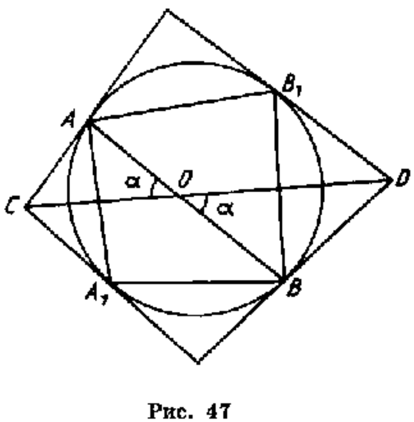


Рис. 47

Если $l_A = l_B$, то $\frac{b}{b+c}\left(1-\frac{a}{b+c}\right)=\frac{a}{a+c}\left(1-\frac{b}{a+c}\right)$ или $\frac{b}{b+c}-\frac{a}{a+c}=$ $=ab\left[\frac{1}{(b+c)^2}-\frac{1}{(a+c)^2}\right]$, т. е. $\frac{c(b-a)}{(b+c)(a+c)}=\frac{ab(a-b)(a+b+2c)}{(b+c)^2(a+c)^2}$. Так как a, b, c — положительные числа, то такое равенство может быть лишь при $a=b$.

118. Пусть в пятиугольнике $ABCDE$ стороны $AB=BC=CD=$ $=DE=a$ и $\angle B=\angle C=\angle D=\alpha$. Если $\alpha=108°$ — угол правильного пятиугольника, то $AE=a$. Покажем, что $AE<a$ при $90°\leqslant\alpha<108°$ и $AE>a$ при $108°<\alpha<180°$ (при $\alpha<90°$ ломаная $ABCDE$ самопересекается). Имеем: $AC=CE=2a\sin\frac{\alpha}{2}$, $\triangle ABC=\triangle CDE$ — равнобедренные, $\angle BCA=\angle ECD=\frac{180°-\alpha}{2}$, т. е. $\angle ACE=\alpha-2\cdot\frac{180°-\alpha}{2}=$ $=2\alpha-180°$. По теореме косинусов из $\triangle ACE$

$$AE^2=2AC^2(1-\cos ACE)=$$
$$=4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-\cos(2\alpha-180°)).$$

Когда α увеличивается от $90°$ до $180°$, $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ увеличивается от $\frac{1}{2}$ до 1, а $\cos(2\alpha-180°)$ уменьшается от 1 до -1. Поэтому AE увеличивается от 0 до $4a$, и так как $AE=a$ при $\alpha=108°$, то $AE<a$ при $90°\leqslant\alpha<108°$ и $AE>a$ при $108°<\alpha<180°$.

120. Середина искомой хорды совпадает с основанием перпендикуляра, опущенного из данной точки на другую сторону угла. Задача не имеет решения, если расстояние от основания перпендикуляра до вершины угла меньше половины длины хорды.

121. 4 см.

123. 10π.

124. Пусть диагональ AB вписанного четырехугольника и диагональ CD описанного четырехугольника пересекаются в точке O (рис. 47). Применяя теорему синусов к треугольнику OAC, имеем $\frac{CO}{\sin OAC}=\frac{AC}{\sin\alpha}$ (*). Применяя ту же теорему к $\triangle OBD$, имеем $\frac{OD}{\sin OBD}=\frac{BD}{\sin\alpha}$ (**). Но $\sin OBD=\sin(180°-\angle OAC)=\sin OAC$, поскольку $\angle OBD$ дополняет $\angle OAC$ до $180°$ (прямые AC и BD либо параллельны, либо пересекаются в точке S, но тогда $\triangle ABS$ — равнобедренный). Поэтому, разделив равенство (*) на равенство (**) почленно, получим $\frac{CO}{OD}=\frac{AC}{BD}$.

Значит, точка O делит диагональ CD описанного четырехугольника в отношении $\frac{AC}{BD}$. В том же отношении делит ее и точка пересечения с диагональю A_1B_1 вписанного четырехугольника (так как по свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $A_1C=AC$ и $B_1D=BD$ и, значит, $\frac{A_1C}{B_1D}=\frac{AC}{BD}$). Поэтому точка O принадлежит также диагонали A_1B_1. Получается, что диагональ CD описанного четырехугольника проходит через точку пересечения диагоналей вписанного четырехугольника. Аналогично доказывается, что и вторая диагональ описанного четырехугольника проходит через точку O.

125. Пусть $ABCD$ — данный выпуклый четырехугольник, AC и BD — его диагонали (рис. 48). Углы BAC и BAD отложены от полупрямой AB в одну полуплоскость. Поэтому сторона меньшего из них, отличная от AB, проходит между сторонами большего. Меньшим углом является, очевидно, угол BAC (в противном случае луч AD проходил бы между сторонами угла BAC и, значит, эти стороны лежали бы в разных полуплоскостях относительно прямой AD, что противоречит выпуклости четырехугольника). Поэтому луч AC проходит между сторонами угла BAD и, значит, пересекает отрезок BD с концами на его сторонах. Точно так же доказывается, что и луч BD пересекает отрезок AC, откуда и следует, что отрезки AC и BD пересекаются.

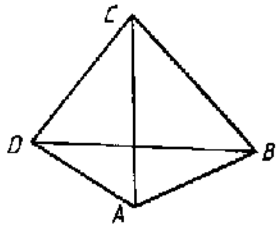


Рис. 48

126. Концы любой стороны данного четырехугольника лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей противолежащую ей сторону. Именно в той, где находится точка пересечения диагоналей.

127. 24 см^2.

128. $c^2/8$. Указание. Медиана, проведенная к гипотенузе, разбивает данный треугольник на два равновеликих, один из которых равнобедренный с углом 30° при вершине.

129. а) $\frac{507}{4}\sqrt{3}$; б) 338; в) $\frac{65}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ (см. задачу 25 к § 12).

130. 25π.

131. Пусть EF — средняя линия четырехугольника $ABCD$ (рис. 49). Опустим на прямую EF перпендикуляры $AH=DG=a$, $BL=CK=b$ и обозначим $EG=EH=x$, $FL=FK=y$, $EF=l$. Площади $ABFE$ и $CDEF$ получаются из площадей трапеций $ABLH$ и $CDGK$ и треугольников AEH, DEG, BFL, CKF.

В случае а) $S_{ABFE}=(l+y-x)\frac{a+b}{2}-\frac{by}{2}+\frac{ax}{2}$, $S_{CDEF}=(l-y+x)\frac{a+b}{2}+$ $+\frac{by}{2}-\frac{ax}{2}$, откуда $S_{ABFE}-S_{CDEF}=(a+b)(y-x)-by+ax=ay-bx$. Если $S_{ABFE}-S_{CDEF}=0$, то $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$, т. е. $AD \parallel BC$.

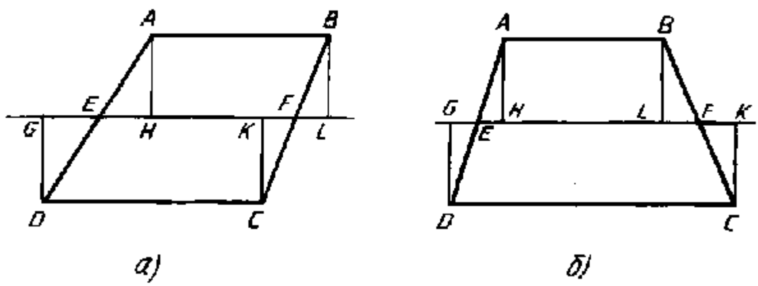


Рис. 49

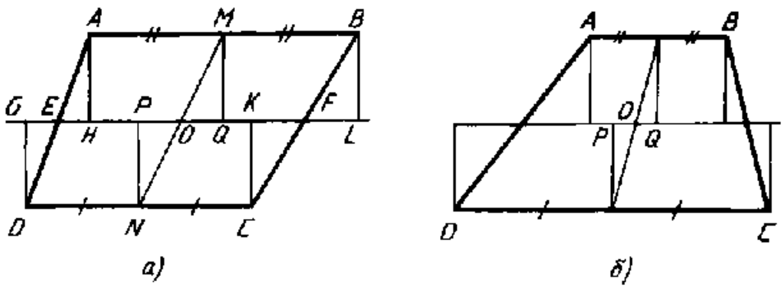


Рис. 50

В случае б) площади $ABFE$ и $CDEF$ не могут быть одинаковыми: $S_{ABFE}=(l-y-x)\frac{a+b}{2}+\frac{by}{2}+\frac{ax}{2}$, $S_{CDEF}=(l+y+x)\frac{a+b}{2}-\frac{by}{2}-\frac{ax}{2}$, откуда $S_{CDEF}-S_{ABFE}=(a+b)(y+x)-by-ax=ay+bx>0$.

132. Аналогично задаче 131 положим $AH=DG=a$, $BL=CK=b$, $EG=EH=x$, $FL=KF=y$, $EF=l$ (рис. 50). Так как MQ и NP — средние линии трапеции $ABLH$ и $CKGD$, то $MQ=NP=\frac{a+b}{2}$, $HQ=QL$, $GP=PK$. Отрезки MN и EF делятся точкой пересечения O пополам как диагонали параллелограмма $EMFN$. Поэтому в случае а) $PO=OQ=\frac{x+y}{2}$, $OE=OF=\frac{l}{2}$, $S_{AMOE}=HQ\frac{AH+MQ}{2}+\frac{EH\cdot AH}{2}-\frac{OQ\cdot MQ}{2}=\frac{a}{2}\left(\frac{l+x+y}{6}\right)^2+\frac{a+b}{4}\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{l}{2}\,\frac{3a+b}{4}-\frac{bx}{4}+\frac{ay}{4}=\frac{AH}{2}EQ+\frac{MQ}{2}HO$,

$S_{CFON}=PK\frac{KC+NP}{2}-\frac{OP\cdot PN}{2}+\frac{KF\cdot CK}{2}=\frac{KC}{2}PF+\frac{NP}{2}OK=\frac{b}{2}\,\frac{l+x+y}{2}+\frac{a+b}{4}\left(\frac{l}{2}-y\right)=\frac{l}{2}\,\frac{a+3b}{4}+\frac{bx}{4}-\frac{ay}{4}$, откуда $S_{AMOE}+S_{CFON}=\frac{l(a+b)}{2}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$, так как из решения задачи 131 следует, что $S_{ABCD}=l(a+b)$.

Случай б) $\left(\text{в котором без ограничения общности можно считать, что } x\geqslant y, \text{ и тогда } PO=OQ=\frac{x-y}{2}\right)$ рассматривается аналогично: во всех формулах нужно заменить y на $-y$.

133. Разбить четырехугольник диагоналями на четыре треугольника и каждый треугольник рассмотреть отдельно.

134. 12 см^2. Указание. Вычислить площадь параллелограмма, образованного серединами сторон, и воспользоваться результатом задачи 133.

135. См. указание к задаче 133.

136. См. указание к задаче 133.

137. а) 12; б) 25; в) 25; г) 20; д) 18.

138. Угол десятиугольника равен $\frac{8d}{5}$, а угол пятиугольника — $\frac{6d}{5}$. Если в одной точке сходится x десятиугольников и y пятиугольников, то должно иметь место уравнение

$$\frac{8d}{5}x+\frac{6d}{5}y=4d, \text{ или } 4x+3y=10.$$

При этом нужно иметь в виду, что x и y — числа натуральные. Полагая $x=1, 2, 3, \ldots$, найдем из уравнения, что $y=2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$. Из этих чисел первое натуральное, а все последующие отрицательные. Таким образом, единственно возможным оказывается решение $x=1$, $y=2$, т. е. что в каждой точке сходятся один десятиугольник и два пятиугольника. Но можно убедиться, что паркет из десятиугольников и пятиугольников все же невозможен. Из двух соседних сторон пятиугольника к одной должен прилегать десятиугольник, а к другой — пятиугольник, потому что в вершине должны сходиться один десятиугольник и два пятиугольника. При обходе пятиугольника мы должны около одной стороны найти десятиугольник, около следующей — пятиугольник, около третьей — опять десятиугольник, около четвертой — пятиугольник, около пятой — десятиугольник. Но тогда оказалось бы, что к двум соседним сторонам — первой и пятой — прилегают десятиугольники, что невозможно.

139. Решая эту задачу по интуиции, учащиеся, как правило, утверждают, что зазор больше в случае футбольного мяча, так как по их представлению прибавление 1 м к длине обруча футбольного мяча значительно увеличит его длину, а значит, и зазор будет большой, а в случае земного шара увеличение это по сравнению с длиной обруча незначительное. Пусть радиусы земного шара и футбольного мяча соответственно равны R и r. Тогда длины обручей будут соответственно равны $2\pi R$ и $2\pi r$, а после увеличения их длин на 1 м — $(2\pi R+1)$ и $(2\pi r+1)$. Радиусы увеличенных обручей будут:

$$R_1=\frac{2\pi R+1}{2\pi}=R+\frac{1}{2\pi} \text{ и } r_1=r+\frac{1}{2\pi}.$$

Тогда зазоры

$$R_1-R=\frac{1}{2\pi} \text{ и } r_1-r=\frac{1}{2\pi},$$

т. е. зазоры одинаковы.

140. Взять три точки на краях круглого окна и измерить расстояния между ними. Построенный по трем сторонам треугольник определяет единственную описанную около него окружность.

141. В одном ряду в длину данного листа трапеция укладывается 10 раз, если попеременно к меньшему ее основанию приставлять большее. Находим, что высота трапеции равна 10 см, и поэтому получается 8 рядов. Всего в 8 рядах укладывается 80 трапеций, после чего остается полоса размером 10×80 см, на которой нужная нам трапеция укладывается еще 3 раза. Таким образом, из данного листа можно вырезать всего 83 трапеции нужной формы и размера.

142. Площадь поля S равна 24 м^2. Так как $a_6=R$, то площадь одной плитки находится по формуле

$$S_n=n\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n},$$

откуда $S_6=3\cdot R^2\sin 60^\circ=600\sqrt{3}$ см^2. Чтобы найти число плиток, нужно площадь поля разделить на площадь плитки. Получим:

$$\frac{S}{S_6}=\frac{240\,000}{600\sqrt{3}}=\frac{400\sqrt{3}}{3}.$$

5% от числа плиток составляет $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. Всего же плиток потребуется $\frac{420\sqrt{3}}{3}$, или 243 штуки.

143. Площадь правильного шестиугольника $S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$ (см. предыдущую задачу), а площадь правильного треугольника $S_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. $S_6 : S_3 = 2$, т. е. в два раза меньше.

144. Подача воды в первой трубе будет во столько раз больше, чем во второй трубе, во сколько раз площадь поперечного сечения первой трубы больше площади поперечного сечения второй трубы, т. е.

$$\frac{\pi d_1^2}{4} : \frac{\pi d_2^2}{4} \approx 1{,}8 \text{ раза.}$$

145. Площадь поперечного сечения вала πR^2. Площадь поперечного сечения вала после уменьшения πr^2. По условию задачи $\pi R^2 : \pi r^2 = 1{,}5$, откуда $r = 58$ мм. Значит, диаметр вала уменьшился на 26 мм.

146. Площадь поперечного сечения проволоки равна $\pi R^2 = 4{,}9$ мм^2. Предельная нагрузка, которую может выдержать латунная проволока, равна приблизительно 319 кг.

147. Центр газона должен находиться на расстоянии не меньше чем 5 м от строений и забора. Часть двора, где не может находиться центр клумбы, назовем запретной зоной. Оценим грубо площадь запретной зоны.

Площадь запретной зоны, порождаемой забором, равна $150 \times \times 110 - (150-10)(110-10) = 16\,500 - 14\,000 = 2500$ м^2.

Запретная зона, порождаемая бензохранилищем,— круг радиуса 15 м. Площадь этого круга $\pi \cdot 15^2 = 225 \cdot 3{,}14 = 707$ м^2.

Площадь запретной зоны, порождаемой складом, равна $(20+10)^2 = 900$ м^2, а площадь 10 складов — 9000 м^2.

Площадь запретной зоны, порождаемой цехами, равна $4 \cdot (40+10) \times \times (10+10) = 50 \cdot 20 \cdot 4 = 4000$ м^2. Площадь запретной зоны не превосходит суммы площадей запретных зон, порождаемых забором и строениями (она будет меньше, если некоторые строения расположены ближе чем в 10 м друг от друга или от забора). Значит, эта площадь меньше 16 207 м^2. А площадь двора 16 500 м^2.

Остается участок площадью более 293 м^2, в каждой точке которого можно расположить центр клумбы. Здесь используется следующий вариант принципа Дирихле: если сумма площадей фигур меньше площади двора, то найдется точка двора, не принадлежащая ни одной из фигур.

148. Заметим, что если бы такая прямая существовала, то по обе стороны от нее лежало бы одно и то же число вершин многоугольника.

149. Рассмотреть произвольные четыре точки и доказать, что они либо образуют выпуклый четырехугольник, либо одна из них лежит внутри треугольника, образованного тремя другими. В последнем случае пятая точка может располагаться в одной из 9 областей.

150. Пусть данные точки лежат в вершинах выпуклого шестиугольника. В этом случае решение легко получить, если заметить, что сумма углов выпуклого шестиугольника равна 720° и, следовательно, хотя бы один из этих углов не менее 120°. Остается рассмотреть случай, когда какие-нибудь 5, 4 или 3 из данных точек лежат внутри этого многоугольника. Проведем из какой-нибудь вершины этого многоугольника диагонали. Они разобьют многоугольник на треугольники. Внутри какого-то из полученных треугольников будет находиться одна из заданных точек. Соединив ее с вершинами треугольника, получим три угла, в сумме равные $360°$. Поэтому хотя бы один из них не менее $120°$.

151. Вычислим сумму внутренних углов всех треугольников. Углы треугольников, имеющие вершину в данной внутренней точке, в сумме составляют $360°$. Так как имеется 30 таких точек, то им соответствуют углы, сумма которых равна $360° \cdot 30 = 10\,800°$. Остаются неучтенными углы, вершины которых совпадают с вершинами стоугольника.

Понятно, что они составляют в сумме $180°(100-2)=17\,640°$. Сумма внутренних углов всех треугольников равна $10\,800°+ +17\,640°=28\,440°$. Сумма внутренних углов одного треугольника $180°$, значит, число треугольников $\frac{28\,440}{180}=158$.

152. Наши 1000 точек лежат внутри и в вершинах некоторого выпуклого n-угольника, где $n \leqslant 1000$. Ясно, что проведенные отрезки составляют сеть линий, совпадающих со сторонами n-угольника и дополнительно разбивающих его на ряд треугольников. В самом деле, никакая часть, на которую разбивают отрезки, не может представлять собой многоугольник с числом сторон, большим трех, ибо иначе этот многоугольник можно было бы продолжать разбивать на меньшие части непересекающимися диагоналями, далее каждая точка внутри треугольника обязательно будет соединена со всеми его вершинами, что задает разбиение этого треугольника на три меньших. При этом число внутренних вершин разбиения n-угольника на треугольники будет, очевидно, равно $1000-n$.

Общее число всех треугольников разбиения нетрудно подсчитать, найдя общую сумму всех их углов; эта сумма равна

$$180°(n-2)+360°(1000-n)$$

(первый член отвечает внутренним углам n-угольника, второй — углам, сходящимся во «внутренних» вершинах разбиения). Поэтому число треугольников разбиения будет равно $(n-2)+2(1000-n)= =1998-n$, а общее число их сторон — $3(1988-n)=5994-3n$.

Теперь, для того чтобы найти общее число проверенных отрезков, остается только заметить, что в последнем выражении n отрезков — стороны n-угольника — фигурируют один раз, а все остальные отрезки — два раза (они являются сторонами двух треугольников). Поэтому общее число N отрезков равно $n+\frac{1}{2}(5994-4n)= =2997-n$, т. е. не зависит от порядка, в котором мы соединяли между собой точки. Так как $1000 \geqslant n \geqslant 3$, то $1997 \leqslant N \leqslant 2994$.

153. Так как $S_{ABC}=S_{ACD}$, то высоты BE и DF этих треугольников равны. Значит, четырехугольник $BEDF$ — параллелограмм и его диагонали делятся в точке пересечения O пополам, т. е. $BO=OD$. Точно так же доказывается, что $AO=OC$. Таким образом, диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся в точке пересечения пополам, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

154. Провести через точку D прямую, параллельную диагонали AC.

155. Среди всех треугольников с вершинами в данных точках выберем треугольник наибольшей площади: $S \leqslant 1$. Через каждую его вершину проведем прямую, параллельную противоположной стороне. Площадь треугольника, образованного этими прямыми, как легко видеть, равна $4S \leqslant 4$.

Доказать, что этот треугольник накрывает все n точек. При доказательстве можно воспользоваться тем, что все треугольники с заданным на плоскости основанием a, имеющие площадь S (или меньшую площадь), заключены в полосе между двумя прямыми, параллельными основанию a и отстоящими от него на расстоянии

$$h = \frac{2S}{a}.$$

156. Геолог заведомо выйдет из леса, если он будет идти по произвольной окружности радиуса $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Действительно, если бы вся эта окружность помещалась внутри леса, то площадь леса была бы больше $\pi r^2 = S$.

Формально задача решена, но мы покажем, как можно было бы естественно прийти к такому решению, и заодно убедимся в том, что оценка $2\sqrt{\pi S}$ в некотором смысле наилучшая из возможных.

Заметим, что путь должен быть обязательно замкнутым или по крайней мере содержать точки самопересечения. В самом деле, в противном случае, каким бы длинным ни был путь L, существует лес в виде столь узкой полосы вдоль пути L, что его площадь не превосходит S. Уточняя эти рассуждения, можно показать, что геолог должен идти по некоторому замкнутому маршруту L. Для того чтобы при любой форме леса можно было гарантировать выход на опушку леса, необходимо и достаточно, чтобы площадь, ограниченная линией L, была бы не меньше S. При этом если маршрут L выбран кратчайшим из возможных, то в самых неблагоприятных ситуациях геологу до выхода на опушку придется пройти весь (или почти весь) маршрут L.

Итак, задача о выборе «хорошей стратегии» сводится к следующему вопросу: среди всех замкнутых кривых, ограничивающих площадь S, найти кривую наименьшей длины. Ответ, как известно, даст окружность.

157. а) 42 см^2. б) 174 м^2 или 294 м^2 (два решения). Указание. Найдите сначала боковую сторону CD трапеции $ABCD$. Для этого можно воспользоваться дополнительными построениями, которые обычно применяются при решении задачи 72 из § 6 учебника. Задача имеет два решения, если исходные данные таковы, что $\frac{a\sqrt{3}}{2} < H < a$. Общая формула для площади трапеции имеет вид:

$$S = \frac{1}{2} H (3a \pm 2\sqrt{a^2 - H^2}).$$

При этом a должно быть меньше $R\sqrt{3}$, где R — радиус окружности, описанной около трапеции $MBCD$ ($R\sqrt{3}$ - длина стороны правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R).

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

К-1 *Вариант 1.* 1. 45 см. 2. $8\sqrt{2}$ см, 8 см.
Вариант 2. 1. 6 см. 2. 8 см, $8\sqrt{2}$ см.
Вариант 3. 1. 8 см, 12 см, 14 см. 2. 2 дм, 1 дм, $\sqrt{3}$ дм.
Вариант 4. 1. 10 см. 2. $(8+8\sqrt{3})$ см.

К-2 *Вариант 1.* 1. $\approx 28°57'$. 2. $\approx 6,1$ см, $\approx 7,9$ см, $\approx 6,7$ см.
Вариант 2. 1. $\approx 8,1$ см. 2. $\approx 9,0$ см, $\approx 47°42'$, $\approx 107°18'$ или 3,7 см, $\approx 132°18'$, $\approx 22°42'$.
Вариант 3. 1. $\approx 81°47'$. 2*. $\approx 34,0$ см, $\approx 70°$, $\approx 110°$.
Вариант 4. 1. $\approx 2,54$ см. 2*. $\approx 28,8$ см, $\approx 67°$, $\approx 113°$.

К-3 *Вариант 1.* 1. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ см, $\frac{5}{\sqrt{3}}$ см. 2. 3 см, 4,5 см.
Вариант 2. 1. 2 см, $4\sqrt{3}$ см. 2. 8 см, $4\sqrt{2}$ см.
Вариант 3. 1. $5\sqrt{3}$ см, $5\sqrt{6}$ см. 2. 9 см, 13,5 см.
Вариант 4. 1. $\frac{6}{\sqrt{2}}$ см, $6\sqrt{6}$ см. 2. 12 см, 12 см, $12\sqrt{3}$ см.

К-4 *Вариант 1.* 1. 20 $см^2$, 2,5 см. 2. 80 $см^2$.
Вариант 2. 1. 7 $см^2$, 3,5 см. 2. 28 $см^2$.
Вариант 3. 1. 3,2 дм, $0,16\pi$ $дм^2$. 2. 4 см, 32 см, 504 $см^2$.
Вариант 4. 1. 6 см, 12 см, $6\sqrt{5}$ см, 45π $см^2$. 2. 64 $см^2$, $5\frac{1}{3}$ см.

К-5 *Вариант 1.* 3. $PQ=2,1$ см.
Вариант 2. 3. $AB=9,6$ дм.
Вариант 3. 2. 6 см, 16 см. 3. $CD=5,6$ см.
Вариант 4. 2. 9,6 дм. 3. $ST=5,2$ дм.

К-6 *Вариант 1.* 2. $27\sqrt{3}$ $см^2$. 3. $\frac{a^2}{16}\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$.
Вариант 2. 2. $9(\sqrt{3}-1)$ $дм^2$. 3. $\frac{d^2}{16}(2+\pi)$.
Вариант 3. 2. 150 $см^2$. 3. 2500π $см^2$.
Вариант 4. 2. 392 $дм^2$. 3. 196π $дм^2$.

К-7 *Вариант 1.* 1. 62,4 см, 67,6 см. 2. $a\approx 5,05$ см, $b\approx 5,69$ см, $c\approx 4,49$ см. 3. 27π $см^2$.
Вариант 2. 1. 671 дм, 3660 дм. 2. $a\approx 4,14$ дм, $b\approx 3,89$ дм, $c\approx 2,16$ дм. 3. 147π $дм^2$.
Вариант 3. 1. 125 см, 35 см. 2. 20 см, $26°31'$, $70°32'$, $82°57'$. 3. 30π см.
Вариант 4. 1. 9 дм, 1 дм. 2. 11 дм, $96°50'$, $45°49'$, $37°21'$. 3. 50π дм.

---

* Значения углов округлены с точностью до 1°.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Гусев Валерий Александрович
Медяник Анатолий Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

9 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Т. А. Бурмистрова, Т. Ю. Акимова, И. В. Рекман*
Художники *Е. В. Анненкова, Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор *Н. Н. Бажанова*
Корректор *О. Н. Леонова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 13.02.17. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 1500 экз. Заказ № 2432.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ООО «Тульская типография».
300026, г. Тула, пр-т Ленина, 109.